Diplomarbeit

Zwei-Komponenten-Hydrodynamik stationärer, staubgetriebener Winde

Daniel Krüger
Matr.-Nr. 100 266

Institut für Astronomie und Astrophysik
Technische Universität Berlin

Fertiggestellt im Sommersemester 1993

Zusammenfassung

Stationäre, sphärisch symmetrische und staubgetriebene Winde um C-Sterne werden durch einen Zwei-Komponenten-Ansatz für Gas und Staub beschrieben. Dabei werden die Heiz- und Kühlprozesse im Detail betrachtet. Durch ein geeignetes Lösungsverfahren wurden Modelle für verschiedene Parameter von stellarer Leuchtkraft L_* und Staubkorngröße a_d numerisch berechnet. Die Modellrechnungen zeigen, daß die Reibungsheizung driftender Staubkörner deutlichen Einfluß auf die Gastemperatur hat, und bestätigen die These der vollständigen Impulskopplung. Im Vergleich zur RE- und LTE-Temperaturschichtung bewirkt dies eine Ausdehnung der Staubkondensationszone. Für Sterne mit kleiner Massenverlustrate steigt die Driftgeschwindigkeit des Staubes, und die durch die Drift verursachten Effekte wie Reibungsheizung und dynamische Verdünnung der Staubkomponente sind ausgeprägter.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

Es ist weithin akzeptiert, daß Rote Riesen während ihrer Entwicklung auf dem Asymptotischen Riesenast (AGB) im Hertzsprung-Russel-Diagramm (HRD) einen ausgeprägten Massenverlust in Form von langsamen Sternwinden besitzen. Dies ergibt sich sowohl aus den Beobachtungen, als auch durch theoretische Betrachtungen und numerische Modellierungen [Lafon und Berruyer 1991]. Dieser Massenverlust von der Größenordnung $\dot{M} \sim 10^{-5} M_{\odot}/yr$ beinflußt nicht nur die Entwicklung des Sterns, die AGB-Sterne tragen in ihrer Gesamtheit auch den größten Anteil an der Rückführung stellarer Materie an das interstellare Medium [Gehrz 1989]. Deshalb ist ein Verständnis dieser Sternwinde für viele Bereiche der Astronomie und Astrophysik von Interesse.

Die massiven Sternwinde Roter Riesen werden immer im Zusammenhang mit ausgedehnten Staubhüllen beobachtet [Lafon und Berruyer 1991]. Da der Absorptionsquerschnitt von Staubkörnern sehr viel größer ist als der von gasförmiger Materie, muß dieser Staub einen entscheidenen Einfluß auf die Dynamik des Windes haben. Dies führte zum Konzept eines staubgetriebenen Windes (siehe z. B. [Gehrz und Woolf 1971]), d. h. man versucht Modelle zu konstruieren, in denen Strahlungsdruck auf Staub der dominante Beschleunigungsmechanismus des Windes ist. Dabei stellt sich sofort die Frage, in welchem Maße der Staub den absorbierten Strahlungsimpuls auf das Gas übertragen kann und ob z. B. eine vollständige Impulskopplung gegeben ist. Davon hängt es ab, ob es zu einer Expansion der gesamten Sternhülle kommt und nicht zu einer bloßen Driftbewegung der Staubkörner durch eine ansonsten hydrostatische Atmosphäre.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, das Problem mit einem Zwei-Komponenten-Ansatz zu formulieren, bei dem Staub- und Gaskomponente jeweils durch einen eigenen Satz hydrodynamischer Größen und dazugehöriger Bilanzgleichungen beschrieben werden, um so die Frage nach der vollständigen Impulskopplung mit Sicherheit beantworten zu können. Die Wechselwirkungen zwischen den beiden Komponenten kann man durch Transferterme modellieren, die den Effekt von Stoßprozessen und chemischen Reaktionen zwischen den konstituierenden Partikeln der Komponenten wiedergeben.

Eine solche Zwei-Komponenten-Formulierung eignet sich nicht nur zur Untersuchung des Impulstransfers sondern ebenso zur Beschreibung des Energieaustauschs zwischen Strahlungsfeld, Gas- und Staubkomponente. Ein weiteres wichtiges Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, zu klären, wodurch die Gas- und die Staubtemperatur bestimmt werden. Dazu muß man untersuchen, durch welche Prozesse Energie zwischen Strahlungsfeld, Gas und Staub ausgetauscht wird, um möglichst realistische Kühl- und Heizfunktionen zu finden.

In der veröffentlichten Literatur legen die Arbeiten über staubgetriebene Winde den Schwerpunkt größtenteils auf die Untersuchung eines Teilaspekts des Gesamtproblems. Berruyer und Frisch (1983) überprüften die Gültigkeit der vollständigen Impulskopplung anhand eines einfachen hydrodynamischen Zwei-Komponenten-Modells. Die Temperaturschichtung in den äußeren Hüllenbereichen wurde z. B. von Goldreich und Scoville (1976) bestimmt. Das umfassendste Modell, inklusive einer detaillierten Behandlung der Staubbildung, veröffentlichten Gail und Sedlmayr (1987a). In dieser Arbeit wurde jedoch vorausgesetzt, daß die Drift des Staubes vernachlässigt werden kann und die Gas- und Staubtemperaturen allein durch das Strahlungsfeld bestimmt sind (Strahlungsgleichgewicht).

Die vorliegende Arbeit soll diese Annahmen in einem geeigneten Rahmen untersuchen und ein weiterer Schritt auf dem Weg zur vollständig selbstkonsistenten Lösung des Gesamtproblems sein. Dazu werden stationäre, sphärisch symmetrische und staubgetriebene Winde untersucht. Die dabei eingeführten Formalismen sind im Prinzip auf alle Roten Riesen anwendbar. Die Beschreibung der Staubbildung ist jedoch für kohlenstoffreiche C-Sterne besser ausgearbeitet, da es bei sauerstoffreichen M-Sternen mehrere potentielle Staubbildner gibt und auch die Beschreibung des (heterogenen) Staubwachstums schwieriger ist [Dominik 1992]. Aus diesem Grund werden die Untersuchungen hier am Beispiel von C-Sternen vorgenommen.

In Kapitel 1 werden die theoretischen Grundlagen und relevanten physikalischen Prozesse behandelt. Eine Darstellung des numerischen Lösungsverfahrens für das resultierende Randwertproblem und der dabei auftretenden probleminhärenten Schwierigkeiten erfolgt in Kapitel 2. Die Ergebnisse der durchgeführten Rechnungen werden in Kapitel 3 dargestellt und diskutiert. Am Ende der Arbeit werden bewertende Schlußfolgerungen gezogen und wichtige Erweiterungsmöglichkeiten der vorgenommenen Beschreibung staubgetriebener Winde vorgeschlagen (siehe S. 49).

Kapitel 1

Modellierung

Die formale Beschreibung von zwei (oder mehr) wechselwirkenden Materie-Komponenten folgt im Prinzip einem einfachen Schema: Aufstellung je einer Kontinuitäts-, Bewegungs- und Energiegleichung für jede separate Komponente (s. Abschnitt 1.1) sowie Formulierung der dem speziellen Problem angemessenen Transfer- oder Austauschterme, welche die Gleichungen verschiedener Komponenten koppeln (s. Abschnitt 1.3).

Welche materiellen Komponenten (z. B. Molekülspezies oder Staubkörner) betrachtet man nun aber zweckmäßigerweise als im hydrodynamischen Sinne verschieden? Eine separate Beschreibung ist nur sinnvoll, falls die betreffende Komponente eine vom Gros der Materie verschiedene hydrodynamische (nicht thermische) Geschwindigkeit oder Temperatur besitzt. Dies ist nicht der Regelfall, denn unter Laborbedingungen bewirken die hohen Stoßraten zwischen den einzelnen Konstituenten des Gases (oder einer Flüssigkeit), daß die verschiedenen Spezies eventuelle Unterschiede in der Geschwindigkeit oder der Temperatur schnell ausgleichen.

Unter Extrembedingungen, wie sie in den ausgedehnten, dünnen Hüllen Roter Riesen vorliegen, ist dies nicht der Fall; bei einem Druck der Größenordnung 10^{-6} atm liegt die Zeit zwischen zwei Stößen im Sekundenbereich. Eine Kopplung der hydro- und der thermodynamischen Größen unter den Komponenten ist dann nur gesichert, wenn die Effizienz der Transferterme zwischen den Komponenten hoch ist. Dies ist zwar zwischen den einzelnen Molekülspezies innerhalb der Gasphase gegeben, nicht aber zwischen Gas und Staub. Realer Ausdruck dieser Entkopplung sind die Driftgeschwindigkeit von Staubkörnern oder (in R Cor Bor-Sternen) komplexen Molekülen sowie unterschiedliche Temperaturen von Staub und Gas.

Im folgenden werden also zwei verschiedene Komponenten bezüglich ihrer Expansionsgeschwindigkeiten und Temperaturen unterschieden, nämlich der Staub und die Gasphase.

1.1 Grundgleichungen

Die grundlegenden Gleichungen lassen sich zunächst einteilen in solche, die den Transport von Strahlung durch Materie beschreiben, und solche, die die hydrodynamischen Eigenschaften der einzelnen Komponenten dieser Materie beschreiben. Erstere sind abgeleitet aus der Strahlungstransportgleichung und letztere sind Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen, nämlich Masse, Impuls und Energie.

In dieser Arbeit werden folgende vereinfachende Annahmen gemacht

- Der Sternwind ist stationär
- Die Geometrie ist sphärisch symmetrisch
- Der Sternwind ist nicht-relativistisch
- Effekte durch stellare Magnetfelder oder Rotation werden vernachlässigt

Als unabhängige Variable wird dementsprechend der Abstand r vom Sternschwerpunkt gewählt.

1.1.1 Strahlungsenergiegleichung

Im stationären Fall und bei sphärischer Symmetrie vereinfacht sich die Bilanzgleichung für die frequenzintegrierte mittlere Intensität J mit der Divergenz des frequenzintegrierten Strahlungsflusses H (siehe z. B. [Mihalas und Mihalas 1984]) zu

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 H\right) = \eta - \chi_J J \tag{1.1}$$

Dabei bezeichnet η die Emissivität der Materie und χ_J ist der bezüglich der Strahlungsenergiedichte gemittelte Opazitätskoeffizient.

Die stellare Energieerzeugung findet tief im Sterninnern statt. Unter der Voraussetzung, daß der Fluß sowohl der kinetischen wie auch der thermischen Energie des Massenabstroms $\dot{M}$ vernachlässigbar gegenüber der Leuchtkraft L_* des Sternes ist, d. h. falls

$$\frac{1}{2}\rho v^2 \times 4\pi r^2 \times v \leq \frac{1}{2}\dot{M} v_\infty^2 \ll L_* \tag{1.2}$$

$$\frac{f}{2} nkT \times 4\pi r^2 \times v \leq \frac{f}{2}\frac{\dot{M}}{\mu m_H} kT_* \ll L_* \tag{1.3}$$

kann dem Strahlungsfeld in der Sternhülle kein signifikanter Energiebetrag entzogen oder hinzugefügt werden[1]. In obigen Gleichungen bezeichnen n und ρ die Teilchen- bzw. Massendichte der Materie, v ist die Expansionsgeschwindigkeit und v_∞ die asymptotische Endgeschwindigkeit des Windes. μ ist das mittlere Molekulargewicht in Einheiten der Wasserstoffmasse m_H und f gibt die gemittelte Anzahl der Freiheitsgrade der Gasmoleküle an. Schließlich bezeichnet T_* die Effektivtemperatur des Sternes.

[1] Dies gilt nur unter der Voraussetzung der Stationarität. Bei zeitlich veränderlichen Objekten treten z. B. Stoßwellen auf. Hier kann es lokal zu einer Erhöhung des Strahlungsflusses kommen, wenn das durch Dissipation mechanischer Energie aufgeheizte Gas diese wieder abstrahlt.

Die Voraussetzungen (1.2) und (1.3) sind im Falle der hier betrachteten leuchtkräftigen Roten Riesen erfüllt. Dann gilt

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 H\right) = 0 \tag{1.4}$$

bzw. integriert

$$\boxed{H = H_* \left(\frac{R_*}{r}\right)^2} \tag{1.5}$$

wobei R_* den Sternradius angibt und H_* durch

$$H_* = \frac{\sigma_R T_*^4}{4\pi} \tag{1.6}$$

gegeben ist.

1.1.2 Strahlungsimpulsgleichung

Im stationären Fall und bei sphärischer Symmetrie vereinfacht sich die Bilanzgleichung für den frequenzintegrierten Strahlungsfluß H mit dem frequenzintegrierten Strahlungsdruck K (siehe z. B. [Mihalas und Mihalas 1984]) zu

$$\frac{dK}{dr} + \frac{3K - J}{r} = -\chi_H H \tag{1.7}$$

Dabei bezeichnet χ_H den bezüglich des Strahlungsflusses gemittelten Opazitätskoeffizient.

Eine einfache semi-analytische Methode zur Integration der Strahlungsimpulsgleichung und zum Abschluß der beiden ersten Strahlungsmomentengleichungen ist von Lucy (1971) angegeben worden. Die zugrundeliegende Näherung ist dabei, die spezifische Intensität $I_\nu(r,\mu)$ der Strahlung an jedem Punkt der Sternhülle in zwei Anteile aufzuspalten. Einen Anteil, der direkt aus dem Raumwinkel

$$\mu_* = \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}} \tag{1.8}$$

kommt, den die Sternscheibe ausfüllt, und einen aus dem dazugehörigen Komplementärwinkel. Dann ergibt sich

$$J = 2H_* \left(1 - \mu_* + \frac{3}{2}\tau_L\right) \tag{1.9}$$

wobei τ_L eine optische Tiefenvariable ist, die durch die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{d\tau_L}{dr} = -\kappa_H^{ges} \left(\frac{R_*}{r}\right)^2} \tag{1.10}$$

bestimmt wird. Da im Rahmen dieser Arbeit kein frequenzabhängiger Strahlungstransport durchgeführt wird und somit der spektrale Verlauf des Strahlungsflusses nicht bekannt ist, wird der flußgemittelte Opazitätskoeffizient in Gl. (1.10) hier durch das entsprechende Rosselandsche Mittel ersetzt. Das Rosselandsche Mittel der Gasopazität κ_R^g wurde aus Tabellen von Scholz interpoliert [Scholz und Tsuji 1984].

Mit Hilfe der Gl. (1.9) kann man eine Strahlungsgleichgewichtstemperatur T_{rad} der Materie definieren

$$T_{rad}^4 = \frac{\pi}{\sigma_R} \frac{\kappa_J}{\kappa_B} J \tag{1.11}$$

$$= \frac{T_*^4}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}} + \frac{3}{2} \tau_L \right) \frac{\kappa_J}{\kappa_B} \tag{1.12}$$

wobei κ_B der Planck-gemittelte Absorptionskoeffizient ist. Unter der Annahme $\kappa_J = \kappa_B$ (graue Näherung) ergibt sich

$$\boxed{T_{rad}^4 = \frac{T_*^4}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}} + \frac{3}{2} \tau_L \right)} \tag{1.13}$$

1.1.3 Gas-Kontinuitätsgleichung

Die Bilanzgleichung für die Masse der Gaskomponente lautet

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho_g v_g \right) = -\mathcal{S} \tag{1.14}$$

wobei $\mathcal{S}$ die Rate pro Volumen ist, mit der das Gas Masse durch Staubbildung verliert, und ρ_g bzw. v_g Massendichte und Expansionsgeschwindigkeit des Gases bezeichnen. Bei Roten Riesen liegt der Massenanteil kondensierbarer Materie bei ca. 10^{-3}, d. h. Änderungen des Massenstroms des Gases durch Staubbildung können im allgemeinen vernachlässigt werden. Dann gilt in guter Näherung $\mathcal{S} \equiv 0$ und man erhält durch Integration

$$\boxed{r^2 \rho_g v_g = const \equiv \frac{\dot{M}}{4\pi}} \tag{1.15}$$

Innerhalb der Gasphase können sich die relativen Konzentrationen einzelner Molekülspezies i durch chemische Reaktionen verändern. Die Teilchenzahldichten der Moleküle ergeben sich dann im allgemeinen aus einer chemischen Nichtgleichgewichtsrechnung durch Lösung eines umfangreichen Ratennetzwerks. In dieser Arbeit wird vereinfachend chemisches Gleichgewicht angenommen und die Konzentration der Elemente H, He, O, C, N, Fe, Si, Mg, S, Al und von 39 durch sie gebildeten Molekülen gemäß Dominik (1992) berechnet.

Dabei ist zu beachten, daß Bildung von Staub zwar wie oben ausgeführt den Massenstrom nicht beeinflußt wohl aber die relative Häufigkeit der staubbildenden Elemente. Diese Abnahme der Staubbildner j muß also berücksichtigt werden. Die Entwicklungsgleichung für die relative Häufigkeit ϵ_j lautet

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \epsilon_j n_{\langle H \rangle} v_g \right) = -\mathcal{N}_j \tag{1.16}$$

wobei $\mathcal{N}_j$ die Rate pro Volumen ist, mit der das Gas Atome des staubbildenden Elements j verliert, und $n_{\langle H \rangle} = n_H + 2n_{H_2}$ die gesamte Wasserstoffteilchendichte bezeichnet.

Für die betrachteten C-Sterne wird allein Kohlenstoff als Staubbildner berücksichtigt. Daher ist nur eine Gleichung des Typs (1.16) zu lösen

$$\boxed{\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \epsilon_C n_{\langle H \rangle} v_g \right) = -\mathcal{N}_C} \tag{1.17}$$

1.1.4 Staub-Kontinuitätsgleichung

Beim Staub handelt es sich im Grunde genommen nicht um eine im hydrodynamischen Sinne homogene Komponente, sondern um eine Vielzahl separater Komponenten mit jeweils unterschiedlicher Staubkorngröße. Diese Staubkorngröße kann z. B. durch den Staubkornradius a oder die Anzahl der kondensierten Monomere N parametrisiert werden. Für Staubkörner der Größe N gilt dann eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\rho_N v_N\right) = m_N\mathcal{R}_{gain} - m_N\mathcal{R}_{loss} \tag{1.18}$$

Dabei bezeichnen $\mathcal{R}_{gain}$ und $\mathcal{R}_{loss}$ die Gesamtraten, mit der Staubkörner der Größe N durch Wachstum, Verdampfung und chemische Reaktionen entstehen bzw. vernichtet werden, ρ_N, v_N und m_N sind die Massendichte, Expansionsgeschwindigkeit und Staubkornmasse dieser Staubkomponente.

Da sich der Bereich der Staubkorngrößen über etliche Zehnerpotenzen erstreckt, wäre eine explizite Lösung aller dazugehörigen Gleichungen der Form (1.18) praktisch nicht durchführbar. Diese Komplexität kann erheblich reduziert werden, wenn man geeignet definierte Momente der Staubverteilungsfunktion $f(N) = \rho_N/m_N$ einführt [Gail *et al.* 1984, Gail und Sedlmayr 1988]. Aus dem System von Gleichungen des Typs (1.18) läßt sich dann ein System von vier DGL'en für die Momente ableiten. Aus den Momenten lassen sich wiederum alle für die Dynamik des Sternwindes wichtigen Staubeigenschaften berechnen: die Anzahl aller Staubkörner, ihr mittlerer Radius, ihre mittlere Oberfläche und die Gesamtmasse des Staubes. Die in Gail und Sedlmayr (1984, 1988) angegebenen Momentengleichungen wurden jedoch unter der Annahme abgeleitet, daß die Geschwindigkeit aller Staubkörner gleich groß und gleich der Expansionsgeschwindigkeit des Gases ist. Versucht man diese Annahme aufzugeben, ergibt sich für das Momentengleichungssystem u. a. ein Abschlußproblem ähnlich wie bei dem entsprechenden Momentensystem zur Beschreibung des Strahlungstransports.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen dieser Arbeit liegt in der Beschreibung einer Zwei-Komponenten-Formulierung, bei der unterschiedliche Geschwindigkeiten der Komponenten ausdrücklich zugelassen sind. Es wird deshalb im folgenden die Näherung einer einzigen homogenen Staubkomponente einheitlicher Größe a_d bzw. N_d machen. Diese Näherung wird motiviert durch folgende Resultate der Arbeiten von Gail und Sedlmayr (1987a) sowie Dominik et al. (1989)

- Die Staubbildung in Sternwinden Roter Riesen kann als Zwei-Stufenprozeß aufgefaßt werden: Kondensation von Staubkeimen kritischer Größe und anschließendes Wachstum dieser kritischen Cluster bis zu einer endgültigen Größe.

- Das Wachstum der Staubkörner findet zu einem großen Teil am Ort der Kondensation statt, weil die stetige Verdünnung des Windes infolge der zunehmenden Expansionsgeschwindigkeit die Wachstumsbedingungen verschlechtert. Die endgültige Größe eines Staubkorns wird also durch den Ort seiner Entstehung (Keimbildung) bestimmt. Staubkörner, die in vergleichbarem Sternabstand entstanden sind, werden auch ungefähr gleich groß.

- Die Kondensationszone selbst ist im Vergleich zu den Dimensionen des Windes örtlich scharf begrenzt, d. h. die relevanten Wachstumsbedingungen für alle gebildeten Keime sind relativ ähnlich.

- Für die Dynamik des Sternwindes ist, zumindest für Staubkorngrößen, die klein sind im Vergleich zu den relevanten Wellenlängen der Strahlung, weniger die genaue Größenverteilung des Staubes relevant als der Gesamtanteil an kondensierter Materie. Dieser wird, wie die Ergebnisse zeigen, auch durch ein grobes Modell der Staubbildung gut reproduziert.

Aus diesen Gründen wird die Staubbildung hier durch eine ortsabhängige Bildungsrate J_* für die Kondensation kritischer Cluster beschrieben. Vom anschließendem Wachstum wird angenommen, daß es instantan bis zur endgültigen Größe a_d der Staubteilchen erfolgt. Diese Größe a_d ist der freie Input-Parameter für die hier verwendete vereinfachte Behandlung der Staubbildung. Die zur Anwendung kommende Staub-Kontinuitätsgleichung lautet somit

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\rho_d v_d\right) = m_d J_*} \tag{1.19}$$

1.1.5 Gas-Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung erhält man ganz allgemein aus der Bilanzgleichung des Impulses unter der Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung. Sie lautet

$$\rho_g v_g \frac{dv_g}{dr} + \frac{dp}{dr} = -\frac{GM_*\rho_g}{r^2} + f_{drag} \tag{1.20}$$

Dabei bezeichnet p den Gasdruck, die Staubkomponente hat keinen Druck im gewohnten Sinne. Bei dem Term zur Beschreibung der Gravitationskraft wurde vorausgesetzt, daß die Masse des Sternwindes klein ist im Vergleich zur Masse M_* des Sternes, sodaß die Eigengravitation der Hülle vernachlässigt werden kann. Der letzte Term in Gl. (1.20) beschreibt die Impulstransferrate f_{drag} durch Stöße mit strahlungsdruckbeschleunigten Staubkörnern. Sie wird im Abschnitt 1.3 näher ausgeführt. Der Strahlungsdruck auf Moleküle wird in diesem Modell eines staubgetriebenen Windes nicht berücksichtigt. Für dessen korrekte Behandlung müßte ein frequenzabhängiger Strahlungstransport in den Moleküllinien gerechnet werden, der weit außerhalb der Zielsetzung dieser Arbeit liegt. Strahlungsdruck durch Thomson- oder Rayleigh-Streuung hingegen kann vernachlässigt werden [Tsuji 1966].

Unter Zuhilfenahme der Gas-Zustandsgleichung (1.30) kann die Bewegungsgleichung in die Form einer Windgleichung [Parker 1960] überführt werden

$$(v_g^2 - c_T^2)\frac{dv_g}{dr} = v_g\left[\frac{2c_T^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho_g}f_{drag} - \frac{dc_T^2}{dr}\right] \equiv v_g\Phi_T \tag{1.21}$$

wobei c_T die isotherme Schallgeschwindigkeit bezeichnet. In dieser Form läßt sich die Lösungstopologie und der singuläre Punkt der Gleichung am besten diskutieren (s. Abschnitt 2.1).

Die rechte Seite ist über den Term dc_T^2/dr vom Temperaturgradienten abhängig, die Windgleichung (1.21) liegt also nicht in der Normalform einer gewöhnlichen Differentialgleichung (DGL) vor, sondern ist mit der Energiegleichung (1.26) gekoppelt. Die zu lösenden Gleichungen bilden somit (noch) kein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Durch wechselseitiges Einsetzen der Gleichungen (1.21) und (1.26) können jeweils die

Gradienten auf der rechten Seite der DGL eliminiert werden und man erhält eine brauchbare Form der Windgleichung, in der von der isothermen Schallgeschwindigkeit c_T zur adiabatischen c_S übergegangen wurde

$$\boxed{(v_g^2 - c_S^2)\frac{dv_g}{dr} = v_g\left[\frac{2c_S^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho_g}f_{drag} - \frac{2}{f\rho_g v_g}(q_{rad} + q_{fric} + q_{acc})\right] \equiv v_g\Phi_S} \quad (1.22)$$

Dabei wurde angenommen, daß die radiale Variation des mittleren Molekulargewichts μ langsam, d. h. vernachlässigbar ist.

1.1.6 Staub-Bewegungsgleichung

Im Falle der weiter oben ausgeführten vereinfachenden Behandlung der Staubbildung und der Betrachtung einer homogenen Staubkomponente einheitlicher Größe kann man die Gleichung für die Impulsbilanz in folgender Form aufstellen

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\rho_d v_d^2\right) = -\frac{GM_*\rho_d}{r^2} + f_{rad}^d - f_{drag} + m_d v_{inj} J_* \quad (1.23)$$

Dabei bezeichnet f_{rad}^d den Strahlungsdruck auf die Staubkomponente. Der letzte Term gibt den Zuwachs an Impuls aufgrund neu gebildeter Staubkörner, die mit der Geschwindigkeit v_{inj} injiziert werden, an.

Mit Hilfe der Staub-Kontinuitätsgleichung (1.19) läßt sich obige Impulsbilanzgleichung in die Bewegungsgleichung umformen

$$\rho_d v_d \frac{dv_d}{dr} = -\frac{GM_*\rho_d}{r^2} + f_{rad}^d - f_{drag} + m_d(v_{inj} - v_d)J_* \quad (1.24)$$

Die Festlegung der Injektionsgeschwindigkeit v_{inj} ist aufgrund des angenommenen instantanen Wachstums der Staubkörner in dem vorliegenden Modell etwas problematisch. Neu gebildete kritische Cluster bewegen sich mit der Gasgeschwindigkeit. Während ihres Wachstums bewegen sie sich jeweils mit der zu ihrer momentanen Größe $N(t)$ gehörigen Geschwindigkeit v_N. Daraus ergibt sich für das bezüglich des Wachstums vereinfachten Modells, daß die Injektionsgeschwindigkeit v_{inj} mit der Geschwindigkeit v_{N_d-m} des Staubkorns vor dem letzten Elementarwachstumsprozeß, d. h. der Anlagerung eines C_m Moleküls ($m \leq 3$), angesetzt werden kann. Da $m \ll N_d$ sind die Injektionsgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit der Staubkomponente praktisch gleich. Der letzte Term auf der rechten Seite von Gl. (1.24) kann also vernachlässigt werden und es ergibt sich für die Bewegungsgleichung der Staubkomponente

$$\boxed{\rho_d v_d \frac{dv_d}{dr} = -\frac{GM_*\rho_d}{r^2} + f_{rad}^d - f_{drag}} \quad (1.25)$$

1.1.7 Thermische Energiegleichung für die Gaskomponente

Bezeichnet e_g die thermische Energie pro Volumen, so lautet die dazugehörige Bilanzgleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 e_g v_g\right) + \frac{p}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 v_g\right) = q_{rad} + q_{fric} + q_{acc} \quad (1.26)$$

Die Kühl- bzw. Heizfunktionen auf der rechten Seite beschreiben den Energieaustausch q_{rad} mit dem Strahlungsfeld, die Reibungsaufheizung durch driftende Staubkörner q_{fric} und den Energieaustausch q_{acc} durch Akkomodation von Gaspartikeln auf Staubkörnern. Sie werden im Abschnitt 1.3 näher behandelt. Sonstige Effekte, z. B. exotherme chemische Reaktionen auf der Oberfläche von Staubkörnern, werden vernachlässigt.

Der zweite Term auf der linken Seite, der die Kühlung durch adiabatische Expansion beschreibt, enthält den Geschwindigkeitsgradienten. Die Normalform einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist also nicht gegeben. Wie schon bei der Ableitung der Windgleichung (1.22) beschrieben, kann dies durch wechselseitiges Eliminieren der Gradienten behoben werden. Man erhält dann

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 e_g v_g\right) + p\left(\frac{2v_g}{r} + \frac{v_g \Phi_S}{v_g^2 - c_S^2}\right) = q_{rad} + q_{fric} + q_{acc} \tag{1.27}$$

Diese Energiebilanz kann mit der kalorische Zustandsgleichung (1.32) in eine DGL für die kinetische Gastemperatur T_g umgeformt werden. Unter Ausnutzung der Gas-Kontinuitätsgleichung (1.15) und der Annahme, daß die radiale Variation des mittleren Molekulargewichts μ langsam, d. h. vernachlässigbar ist, erhält man direkt

$$\boxed{\frac{dT_g}{dr} = -\frac{2}{f}\frac{T_g}{v_g}\left(\frac{2v_g}{r} + \frac{v_g \Phi_S}{v_g^2 - c_S^2}\right) + \frac{2}{f}\frac{\mu m_H}{\rho_g k v_g}(q_{rad} + q_{fric} + q_{acc})} \tag{1.28}$$

1.1.8 Innere Energiegleichung für die Staubkomponente

Unter der Berücksichtigung der Tatsache, daß der Staub ein druckloses Medium ist, ist für die Energiebilanz der Staubkomponente nur die *innere* Energie relevant. Diese ist durch eine innere (Gitter)Temperatur T_d der Staubkörner gegeben. Prinzipiell kann auch für die radiale Entwicklung dieser Temperatur eine DGL aufgestellt werden. Es zeigt sich jedoch, daß die Energieaustauschrate mit dem Strahlungsfeld alle anderen Kühl- oder Heizprozesse um mehrere Größenordnungen überwiegt [Gauger *et al.* 1990]. Die innere Staubtemperatur ergibt sich dann einfach als die gemäß (1.13) definierte Strahlungsgleichgewichtstemperatur

$$\boxed{T_d = T_{rad}} \tag{1.29}$$

1.1.9 Materialgleichungen

Aus Thermodynamik und statistischer Physik lassen sich sog. Materialgleichungen ableiten. Dies sind allgemeine Zusammenhänge, die die Größen p, ρ_g und e_g verknüpfen und somit das thermodynamische Verhalten des Gases beschreiben. Die spezielle Form der Materialgleichungen hängt von dem betrachteten Objekt, d. h. der konkreten physikalischen Situation ab. Verwendet wird hier zum einen die (Druck-)Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\boxed{\frac{p}{\rho_g} = \frac{kT_g}{\mu m_H}}\left(= c_T^2 = \frac{c_S^2}{\gamma}\right) \tag{1.30}$$

Das mittlere Molekulargewicht berechnet man dabei durch

$$\mu = \frac{n_H + 2n_{H_2} + 4n_{He}}{n_H + n_{H_2} + n_{He}} \tag{1.31}$$

Außerdem bezeichnet γ den Adiabatenexponent.

Desweiteren wird die kalorische Zustandsgleichung benutzt

$$\boxed{e_g = \frac{f}{2} n_g k T_g} \tag{1.32}$$

wobei f die mittlere Anzahl der Freiheitsgrade eines Gaspartikels ist

$$f = \frac{3n_H + 5n_{H_2} + 3n_{He}}{n_H + n_{H_2} + n_{He}} \tag{1.33}$$

1.2 Randbedingungen und Parameter

Bei der vorliegenden Modellierung wird das Problem durch das gekoppelte System der sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen (1.10), (1.17), (1.19), (1.22), (1.25) und (1.28) für die Größen τ_L, ϵ_C, ρ_d, v_g, v_d sowie T_g bestimmt. Diese DGL'en sind folgenden Randbedingungen unterworfen

$$\begin{aligned}
\tau_L(R_*) &= \frac{2}{3} && (1.34)\\
\tau_L(r \to \infty) &= 0 && (1.35)\\
\epsilon_C(R_*) &= \epsilon_{C,0} && (1.36)\\
\rho_d(R_*) &= 0 && (1.37)\\
v_d(r_{cond}) &= v_g(r_{cond}) && (1.38)\\
T_g(R_*) &= T_* && (1.39)
\end{aligned}$$

wobei r_{cond} der Radius ist, ab dem Staubbildung einsetzt, d. h. die Nukleationsrate J_* größer Null wird. Außerdem muß eine innere, implizite Randbedingung der Windgleichung erfüllt sein (vgl. Abschnitt 2.1)

$$\Phi_S(r(v_g = c_S)) = 0 \tag{1.40}$$

Die Anzahl der zu erfüllenden Randbedingungen übersteigt die der DGL'en um eins. Es liegt also ein kombiniertes Rand- und Eigenwertproblem vor. Als freie stellare Parameter, die die selbstkonsistente Lösung bestimmen, wurden M_*, L_*, T_* und $\epsilon_{C,0}$ gewählt. Die Massenverlustrate $\dot{M}$ ergibt sich dann als Eigenwert des Problems, um die überzählige Randbedingung zu erfüllen.

1.3 Quell- und Transferterme

Es sollen nun die im Abschnitt 1.1 eingeführten Quell- und Transferterme behandelt werden. Dazu ist zu untersuchen, welche Prozesse bei der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Komponenten unter den Bedingungen in zirkumstellaren Hüllen relevant sind und welche nicht. Die Terme werden dabei grob unterteilt in solche, die mit der Massen-, Impuls- bzw. Energiebilanz verknüpft sind (s. Unterabschnitte 1.3.1, 1.3.2 und 1.3.3)

1.3.1 Staubbildung

Wie bereits in Abschnitt 1.1.4 erläutert wurde, wird die Staubbildung durch ein vereinfachtes Modell beschrieben, in dem die kondensierten Staubkeime instantan zu einer einheitlichen Endgröße a_d bzw. N_d wachsen. Der Materietransfer zwischen Gas- und Staubkomponente wird deshalb von der Nukleationsrate J_* bestimmt. Sie wird gemäß der klassischen Nukleationstheorie berechnet [Gail *et al.* 1984].

Die auf das Volumen bezogene Rate $\mathcal{N}_C$, mit der das Gas C-Atome durch Staubbildung verliert (s. Gl. 1.17) ergibt sich dementsprechend durch

$$\mathcal{N}_C = J_* \frac{m_d}{m_C} \tag{1.41}$$

falls die Staubkörner aus reinem Kohlenstoff (z. B. in der Form von amorphem Graphit) bestehen.

1.3.2 Impulstransfer

Hier ist zunächst zu unterscheiden zwischen Impulstransfer vom Strahlungsfeld zur Materie und dem Impulstransfer zwischen verschiedenen Materiekomponenten.

Im ersten Fall wird ein Teil des radialen Strahlungsflusses des Sterns absorbiert bzw. gestreut. Bei der Absorption wird der Impuls der Photonen vollständig auf den Absorber übertragen und die Photonen werden anschließend thermalisiert. Auch bei Streuung wird zunächst der volle Photonenimpuls übertragen, dann werden die Photonen (im einfachsten Fall) isotrop reemittiert, wobei der dabei übertragene Impuls im Mittel verschwindet. Die Netto-Impulsaufnahme ist also proportional zur Opazität und beträgt allgemein

$$f_{rad} = \frac{4\pi}{c} \chi_H H \tag{1.42}$$

Der Strahlungsdruck auf Moleküle wird, wie bereits gesagt, nicht berücksichtigt. Das Problem besteht also in einer geeigneten Wahl für den flußgemittelten Opazitätskoeffizienten χ_H^d des Staubes.

Sind die Teilchengrößen klein im Vergleich zu den relevanten Wellenlängen, im Falle von Roten Riesen ca. 1 μm, so kann für die Berechnung der Staubopazität die Mie-Theorie im Grenzfall kleiner Teilchen angewendet werden. Dann ergibt sich nach Gail und Sedlmayr (1987a)

$$\chi_H^d = \frac{3}{4} \frac{\rho_d}{\rho_s} Q'(T_{rad}) \tag{1.43}$$

wobei ρ_s die Massendichte der kondensierten Phase ist und $Q'(T_{rad})$ die Extinktionseffizienz des Staubmaterials geteilt durch den Staubkornradius [Lucy 1976].

Da die spektrale Verteilung des Strahlungsflusses nicht bekannt ist, wird nun χ_H^d durch das Rosseland-Mittel χ_R^d ersetzt. Die experimentell bestimmten optischen Eigenschaften von amorphem Kohlenstoff [Koike *et al.* 1980] werden gemäß Gail und Sedlmayr (1985) approximiert durch

$$Q'_R(T_{rad}) = 5.9\, T_{rad} \tag{1.44}$$

Es muß nun zweitens untersucht werden, in welchem Maße Impuls zwischen den einzelnen Materiekomponenten ausgetauscht wird. Es ist bekannt, daß die durch Strahlungsdruck effektiv beschleunigten Staubkörner durch das Gas driften und beim Stoß mit einzelnen Gaspartikeln Impuls an diese abgeben. Der bei diesem Vorgang übertragene Impuls läßt sich für sphärische Teilchen analytisch berechnen [Baines *et al.* 1965] und ist für spiegelnde und diffuse Reflektion gleich groß. Ein von Baines et al. angegebener zusätzlicher Term bei diffuser Reflektion ist zwar mathematisch korrekt, beruht aber auf einer angenommenen Korrelation zwischen Relativgeschwindigkeit des adsorbierten Gaspartikels zum Staubkorns und seiner Reemissionsrichtung. Im realistischen Falle von rotierenden Staubkörnern ist diese Korrelation nicht gegeben und die Reemission erfolgt isotrop.

Mit der von Draine (1986) angegeben Näherung für die Abhängigkeit des Impulstransfers von der Driftgeschwindigkeit v_{drift} des Staubes ergibt sich mit einer Genauigkeit von 1.5%

$$f_{drag} = \rho_g n_d \pi a_d^2 v_{drift} \left[\left(\frac{4}{3} v_{th} \right)^2 + v_{drift}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.45}$$

wobei v_{th} die wahrscheinlichste thermische Geschwindigkeit ist

$$v_{th} = \left(\frac{8kT_g}{\pi \mu m_H} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.46}$$

1.3.3 Energieaustausch

Im Abschnitt 1.1.7 wurden drei Kühl- bzw. Heizfunktionen eingeführt, deren genaue Form nun beschrieben werden soll.

Wechselwirkung zwischen Gasphase und Staubkomponente

Die durch das Gas driftenden Staubkörner erzeugen eine Reibungsaufheizung mit der Rate q_{fric}, da die beim Stoß übertragene mechanische Energie der Staubkörner nicht vollständig in gerichtete kinetische Energie des Gases, sondern auch in ungeordnete thermische Energie umgewandelt wird. Nach den Ergebnissen von Draine (1986) gilt bei rein elastischen Stößen mit spiegelnder Reflektion

$$q_{fric}^{el} = v_{drift} f_{drag} \tag{1.47}$$

Zu einem bestimmten Anteil α werden die Gaspartikel vollkommen inelastisch an einem Staubkorn gestreut (diffuse Reflektion). Damit ist gemeint, daß aufprallende Gaspartikel adsorbiert werden, thermisch akkomodieren und dann mit einer für die innere Staubtemperatur charakteristischen Geschwindigkeit evaporieren. Durch die Aufprallenergie der Gaspartikel erhitzt sich dabei der Staub. Die Heizrate q_{fric} bei inelastischer Streuung ist deshalb nur halb so groß wie im elastischen Fall [Draine 1980]. Insgesamt ergibt sich

$$q_{fric} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) f_{drag} \tag{1.48}$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \rho_g n_d \pi a_d^2 v_{drift}^2 \left[\left(\frac{4}{3} v_{th} \right)^2 + v_{drift}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.49}$$

Bei jedem inelastischem Stoß zwischen Staubkorn und Gaspartikeln wird im Zuge der Akkomodation ein Teil der inneren Wärmeenergie (Gitterschwingungen) des Staubes in thermische Energie des Gases umgewandelt bzw. umgekehrt, je nachdem, ob T_d größer oder kleiner als T_g ist. Die entsprechende Energieaustauschrate lautet nach Draine (1980)

$$q_{acc} = \alpha n_g n_d \pi a_d^2 \frac{f}{2} k(T_d - T_g) \left[v_{th}^2 + v_{drift}^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.50}$$

Für molekulare Gase mit einer Temperatur im Bereich von 1000 K beträgt α ungefähr 0.1 [Hollenbach und McKee 1979].

Wechselwirkung zwischen Gasphase und Strahlungsfeld

In kühlen, dünnen C-Sternhüllen findet praktisch keine Ionisation oder elektronische Anregung statt. Gängige Absorber wie H, He, H^- oder H_2^- leisten also keinen Beitrag zur Opazität des zirkumstellaren Gases [Tsuji 1966]. Sie wird im wesentlichen durch Moleküle mit permanentem Dipolmoment bestimmt, da auch sogenannte druckinduzierte Opazitäten vernachlässigt werden können [Linsky 1969]. Die Austauschrate q_{rad} läßt sich somit als Summe der Beiträge von Vibrations- und Rotationsübergängen einzelner Moleküle i auffassen

$$q_{rad} = \sum_i q_{rad}^i \tag{1.51}$$

Es soll nun stellvertretend ein einzelner Summand q_{rad}^i betrachtet werden. Seine exakte Form lautet

$$q_{rad}^i = 4\pi\kappa_J^i J - 4\pi\eta^i \tag{1.52}$$

Für eine Bestimmung des Absorptionsverhaltens und der Emissivität der betrachteten Molekülspezies i benötigt man die Besetzungsdichten n_l^i der molekularen Energieniveaus l (der Index i wird im folgenden der Lesbarkeit zuliebe weggelassen).

Die Besetzungsdichten n_l ergeben sich im allgemeinen als Lösung eines non-LTE Ratensystems für hunderte molekularer Niveaus. Dies erfordert zum einen einen hohen numerischen Aufwand, zum anderen sind die Übergangskoeffizienten für strahlungs- und stoßinduzierte Übergänge nicht immer für alle vorhandenen Moleküle und ihre relevanten Stoßpartner verfügbar.

Zur Vereinfachung wird daher häufig LTE angenommen. In diesem Fall sind die Besetzungsdichten durch eine Boltzmann-Verteilung gemäß der lokalen kinetischen Gastemperatur gegeben. Die LTE-Annahme ist jedoch für die ausgedehnten, dünnen Hüllen Roter Riesen nicht geeignet. Aufgrund der geringen Dichten ist die Dominanz von Kollisionen hier nicht gesichert und die radiativen Übergänge tendieren dazu, die Materie aus dem LTE-Zustand zu bringen.

In dieser Arbeit wird deshalb der Ansatz eines komponentenweisen LTE gemacht. Das bedeutet, daß die Besetzungdichten $n_{v,J}$ der Vibrations- und der Rotationsniveaus entkoppelt sind (Born-Oppenheimer-Approximation) und jeweils einer Boltzmann-Verteilung gemäß einer noch zu bestimmenden Anregungstemperatur T_{vib} bzw. T_{rot} folgen. Für das Verhältnis der Besetzungsdichten gilt dann

$$\frac{n_{v+1,J}}{n_{v,J}} = \exp\left(-\frac{E_{v+1,J}-E_{v,J}}{kT_{vib}}\right) \tag{1.53}$$

$$\frac{n_{v,J+1}}{n_{v,J}} = \frac{g_{J+1}}{g_J}\exp\left(-\frac{E_{v,J+1}-E_{v,J}}{kT_{rot}}\right) \tag{1.54}$$

Dabei bezeichnen v und J die Vibrations- bzw. Rotationsquantenzahlen, $E_{v,J}$ ist die Energie des dazugehörigen Niveaus und g_J der Entartungsgrad des Rotationsniveaus J. Dieser Ansatz vermeidet zumindest die grobe Vereinfachung einer globalen LTE-Annahme und gibt ohne großen numerischen Aufwand Aspekte einer vollen non-LTE Formulierung wieder. Unter Ausnutzung dieses Ansatzes wird die Berechnung von (1.52) (für eine Molekülspezies i) durchgeführt.

Die Absorptionseigenschaften der Materie sind durch die Besetzung der molekularen Niveaus bestimmt, d. h. von der Anregungstemperatur T_{vib} bzw. T_{rot} abhängig. Das einfallende Strahlungsfeld hingegen ist durch die Temperatur T_{rad} charakterisiert (siehe Gl. (1.11)). Für den Term zur Beschreibung der absorbierten Energie $4\pi\kappa_J^{vib/rot}J$ benötigt man also geeignet gemittelte Opazitätskoeffizienten κ_J^{vib} und κ_J^{rot} in Abhängigkeit von zwei Parametern $T_{rot/vib}$ und T_{rad}. Unter der Annahme, daß die spektrale Verteilung der mittleren Intensität J auch in den Moleküllinien einer Planckverteilung folgt, erhält man

$$\kappa_J^{vib/rot} = \frac{\int B_\lambda(T_{rad})\kappa_\lambda^{vib/rot}(T_{vib/rot})\,d\lambda}{B(T_{rad})} \tag{1.55}$$

Die wellenlängenabhängigen Opazitätskoeffizienten der betrachteten linearen Moleküle i wurden gemäß der *just overlapping line* (JOL-)Approximation berechnet [Tsuji 1966]. Die JOL-Approximation nimmt an, daß die Linien der einzelnen Übergänge soweit verbreitert sind, daß die spektralen Banden ein Kontinuum bilden. Diese Annahme ist wenig kritisch, weil es für die vorliegende Untersuchung nur auf den integralen absorbierten Energiebetrag ankommt und nicht auf seine relative spektrale Verteilung.

Die Emissivität der betrachteten Molekülspezies ergibt sich im Rahmen des komponentenweisen LTE Ansatzes einfach durch das Kirchhoff-Planck-Gesetz

$$\eta = \kappa_{B(T_{vib})}B(T_{vib}) + \kappa_{B(T_{rot})}B(T_{rot}) \tag{1.56}$$

Das Planck-Mittel ergibt sich analog zu Gl. (1.55), wobei speziell $T_{rad} \equiv T_{vib}$ bzw. $T_{rad} \equiv T_{rot}$.

Ausgehend von dem vollen non-LTE Ratensystem soll jetzt je eine Bestimmungsgleichung für die Anregungstemperaturen T_{vib} und T_{rot} der betrachteten Molekülspezies i abgeleitet werden. Mit den radiativen und Kollisionübergangsraten R_{kl} bzw. C_{kl} vom Niveau k zum Niveau l lautet die Ratengleichung für jedes molekulare Energieniveau l (siehe z. B. [Mihalas und Mihalas 1984])

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 n_l v_g\right) = \sum_{k\neq l} n_k(R_{kl}+C_{kl}) - n_l\sum_{k\neq l}(R_{lk}+C_{lk}) \tag{1.57}$$

Da die Zeitskalen der molekularen Stoß- und Strahlungsprozesse sehr viel kleiner sind als die der Expansionszeitskalen, mit der sich die äußeren Bedingungen ändern, kann der Divergenzterm auf der linken Seite gegen die rechte Seite vernachlässigt werden und gleich Null gesetzt werden.

Eine analoge Betrachtung kann man für die Bilanz der innere Energie u der Molekülspezies durchführen. Mit der Energiedifferenz des Übergangs $E_{lk} \equiv E_k - E_l$ ergibt sich

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u v_g\right) = \sum_l n_l \sum_{k>l}(R_{lk} + C_{lk})E_{lk} - \sum_l \sum_{k>l} n_k(R_{kl} + C_{kl})E_{lk} \tag{1.58}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u v_g\right) &= \sum_l \sum_{k>l}(n_l R_{lk} - n_k R_{kl})E_{lk} + \sum_l \sum_{k>l}(n_l C_{lk} - n_k C_{kl})E_{lk} && (1.59)\\ &\equiv q_{rad} + q_{coll} && (1.60) \end{aligned}$$

Dabei sind q_{coll} und q_{rad} die Netto-Energietransferraten durch Kollisionen bzw. durch Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld. Analog zum Falle der Ratengleichungen kann man den Divergenzterm auf der linken Seite gegen die rechte Seite vernachlässigen und man erhält

$$q_{rad} + q_{coll} = 0 \tag{1.61}$$

Für die internen Energiezustände der Moleküle gilt also: Die Summe der Netto-Energietransferraten durch Kollisionen und durch Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld verschwindet bzw. Energieverlust durch Emission und Stoßabregung halten sich die Waage mit dem Energiegewinn durch Absorption und Stoßanregung.

Im Rahmen des komponentenweisen LTE Ansatzes besteht keine Kopplung zwischen den Be- und Entvölkerungsprozesse der Vibrations- und denen der Rotationsniveaus. Dann gelten die getrennten Energiebilanzen

$$\begin{aligned} q_{rad}^{vib} + q_{coll}^{vib} &= 0 && (1.62)\\ q_{rad}^{rot} + q_{coll}^{rot} &= 0 && (1.63) \end{aligned}$$

Wenn man sich geeignete Formen von $q_{rad}^{vib/rot}$ und $q_{coll}^{vib/rot}$ verschafft, so sind dies die gesuchten (impliziten) Gleichungen für T_{vib} und T_{rot}.

Die Energietransferrate durch Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld ergibt sich gemäß Gl. (1.52) und (1.56) nach Einsetzen von Gl. (1.11) unter Verwendung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes

$$q_{rad}^{vib/rot} = 4\sigma_R\left(\kappa_J^{vib/rot} T_{rad}^4 - \kappa_{B(T_{vib/rot})} T_{vib/rot}^4\right) \tag{1.64}$$

Dabei sind κ_J^{vib} bzw. κ_J^{rot} durch Gl. (1.55) gegeben.

Die relativen Besetzungsdichten der Rotationsniveaus innerhalb eines Vibrationsniveaus v sind durch die Anregungstemperatur T_{rot} gegeben (siehe Gl. 1.54). Zur Berechnung der Energietransferrate durch stoßinduzierte Vibrationsübergänge werden hier zweiatomige Moleküle durch ein Zwei-Niveau-Modell beschrieben (vgl. z. B. [Goldreich und Scoville 1976]). Dies wird wie folgt motiviert

- Bei stoßinduzierten Übergängen zwischen Vibrationsniveaus kommt es zwar in der Regel auch zu Änderungen ΔJ der Rotationsquantenzahl, der mit dieser Änderung verbundene Energiebetrag ΔE_{rot} ist jedoch generell klein gegen den mit der Änderung des

Vibrationsniveaus verknüpften Energiebetrag ΔE_{vib}. Da außerdem ΔE_{rot} von wechselndem Vorzeichen ist, je nachdem ob J zu- oder abnimmt kann man annehmen, daß im statistischen Mittel der Vibrationsübergänge ΔE_{rot} verschwindet

$$\Delta E_{vib} > \Delta E_{rot} > \langle \Delta E_{rot} \rangle_{\Delta v \neq 0} \approx 0 \tag{1.65}$$

- Bei den vorliegenden niedrigen Temperaturen in C-Sternhüllen sind die Vibrationsniveaus in guter Näherung nur bis zum ersten angeregten Niveau $v = 1$ besetzt.

Dann gilt für jede Molekülsorte

$$q_{coll}^{vib} = n_i h\nu_{10} n_g C_{10} \left[\exp\left(-\frac{h\nu_{10}}{kT_{vib}}\right) - \exp\left(-\frac{h\nu_{10}}{kT_g}\right) \right] \tag{1.66}$$

Dabei ist n_i die Teilchendichte des betrachteten Moleküls i, $h\nu_{10}$ die Energiedifferenz zwischen dem ersten angeregten und dem Grundzustand und $C_{10} \equiv \langle \sigma_{10} v_{th} \rangle$ ist die Relaxationsrate bezogen auf die Dichte der Stoßpartner n_g.

Anhand der häufigsten Spezies, dem CO Molekül, soll jetzt examplarisch die Anregungstemperatur der Vibrationsniveaus untersucht werden, und zwar deshalb weil nur von diesem Molekül alle Wirkungsquerschnitte bekannt sind. Die Relaxationsraten für Vibrationsanregung bei Stößen mit einem Partner X werden üblicherweise in folgender Form parametrisiert (siehe z. B. [Ayres und Wiedemann 1989])

$$C_{10}^{X,CO} = 10^{-6} kT_g \exp(-AT_g^{-1/3} + B) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{10}^{CO}}{kT_g}\right) \right]^{-1} \tag{1.67}$$

Die sogenannten Landau-Teller Koeffizienten A und B sind für CO und einige wichtige Stoßpartner X experimentell bestimmt worden (s. Tabelle 1.1). Die stoßinduzierten Übergänge werden also in guter Näherung nur durch Kollisionen mit H_2 und H verursacht. Der Grund für die ungefähr um einen Faktor hundert größere Effizienz des (selteneren) atomaren Wasserstoffs ist noch unklar, eventuell hängt sie mit der Bildung eines temporären HCO-Komplexes zusammen [Ayres und Wiedemann 1989].

Bei der Bestimmung der Anregungstemperatur T_{vib}^{CO} der Vibrationszustände mit Hilfe von Gl. (1.62) stellt man für den relevanten Dichtebereich von $10^7 \mathrm{cm}^{-3} \leq n_g \leq 10^{15} \mathrm{cm}^{-3}$ und Temperaturen im Bereich 500 K ... 2000 K fest, daß T_{vib}^{CO} nur minimal von der Strahlungsgleichgewichtstemperatur T_{rad} abweicht. Die Besetzung der Vibrationszustände erfolgt demnach in den dünnen Hüllen Roter Riesen fast ausschließlich durch strahlungsinduzierte Übergänge.

Stoßpartner X	A	B	Referenz
H_2	64	19.1	Glass und Kironde (1982)
H	3±2	18.1±0.2	Glass und Kironde (1982)
He	99	20.5	Millikan und White (1964)
CO	175	23.5	Millikan und White (1964)

Tabelle 1.1: Landau-Teller-Koeffizienten für CO und Stoßpartner X

Man begeht nur einen geringen Fehler, wenn man für T_{vib} den Wert von T_{rad} einsetzt. Gemäß Gl. (1.62) ergibt sich dann für den radiativen Energieaustauschterm direkt und ohne explizites Eingehen der Opazitätskoeffizienten

$$
\begin{aligned}
q_{rad}^{vib,CO} &= -q_{coll}^{vib,CO} && (1.68)\\
&\approx n_{CO} h\nu_{10}^{CO} (n_H C_{10}^{H,CO} + n_{H_2} C_{10}^{H_2,CO}) \left[\exp\left(-\frac{h\nu_{10}^{CO}}{kT_{rad}}\right) - \exp\left(-\frac{h\nu_{10}^{CO}}{kT_g}\right)\right] && (1.69)
\end{aligned}
$$

Bei Vibrationsübergängen wird also z. B. genau so viel Energie abgestrahlt wie durch Kollisionspumpen aufgenommen wurde. Dies bedeutet, daß sich der radiative Energieaustauschterm für das betrachtete Molekül ohne explizites Eingehen der Opazitätskoeffizienten direkt durch die Gleichung (1.69) berechnen läßt.

Durch eine analoge Schlußweise kann man zeigen, daß die Anregungstemperatur T_{rot} der Rotationszustände durch Kollisionen bestimmt ist, also gleich der Gastemperatur T_g ist, sofern Temperatur und Dichte nicht *zu* niedrig sind (s. Anhang A). In diesem Fall läßt sich der radiative Energieaustauschterm für das betrachtete Molekül ohne explizites Eingehen der Stoßquerschnitte für Rotationsanregung direkt durch die Gleichung (1.64) berechnen. Die Rotationsniveaus sind also praktisch im LTE-Zustand und haben eine entsprechende Kühlfunktion.

Wie lassen sich diese Ergebnisse für das CO-Molekül nun auf andere Moleküle übertragen und welche Moleküle sind in den betrachteten C-Sternhüllen als Kühler von Bedeutung?

Die neben CO häufigsten Moleküle haben vergleichbare Absorptionseigenschaften und (soweit bekannt) Stoßquerschnitte. Der Beitrag eines Moleküls zur Gesamt-Energieaustauschrate q_{rad} richtet sich dann vor allem nach dem Produkt aus seiner relativen Häufigkeit und Effizienz. Letztere wiederum ist im wesentlichen durch die jeweilige Größe der Relaxationsrate C_{10} im Falle von Vibrationskühlung bzw. des molekularen Dipolmoments μ_D im Falle von Rotationskühlung bestimmt.

Der radiale Verlauf der chemischen (Gleichgewichts-)Häufigkeiten für ein typisches Sternhüllenmodell (s. Abschnitt 3.1) ist in Abb. 1.1 dargestellt. Da die Relaxationsraten nur für CO bekannt sind, wurde bei der Vibrationskühlung nur dieses (häufigste) Molekül betrachtet. Im Falle der Rotationskühlung wurden zudem noch der Beitrag von HCN, C_2H, C_3H, CS und SiS berücksichtigt, da andere Moleküle entweder seltener sind oder kein permanentes Dipolmoment besitzen. Um die gemittelten Opazitätskoeffizienten κ_J^i und κ_B^i in Abhängigkeit von T_{rad} und $T_{rot}^i (\equiv T_g)$ für die genannten linearen Moleküle i zu bestimmen, müssen zunächst die wellenlängenabhängigen Opazitätskoeffizienten gemäß der JOL-Approximation nach Tsuji (1966) berechnet werden. Einzige Eingangsdaten sind dabei das Dipolmoment μ_D und die Rotationskonstante B der betrachteten Moleküle. Die Werte für die berücksichtigten Spezies sind in Tabelle 1.2 aufgeführt.

Molekül	CO	HCN	C_2H	C_3H	CS	SiS
B [MHz]	56813	44316	43674.70	11186.3	24495.6	9102
μ_D [D]	0.112	2.98	0.8	3.1	1.96	1.73

Tabelle 1.2: Rotationskonstante B und molekulares Dipolmoment μ_D der betrachteten Moleküle nach Landolt-Börnstein [Hellwege 1982]

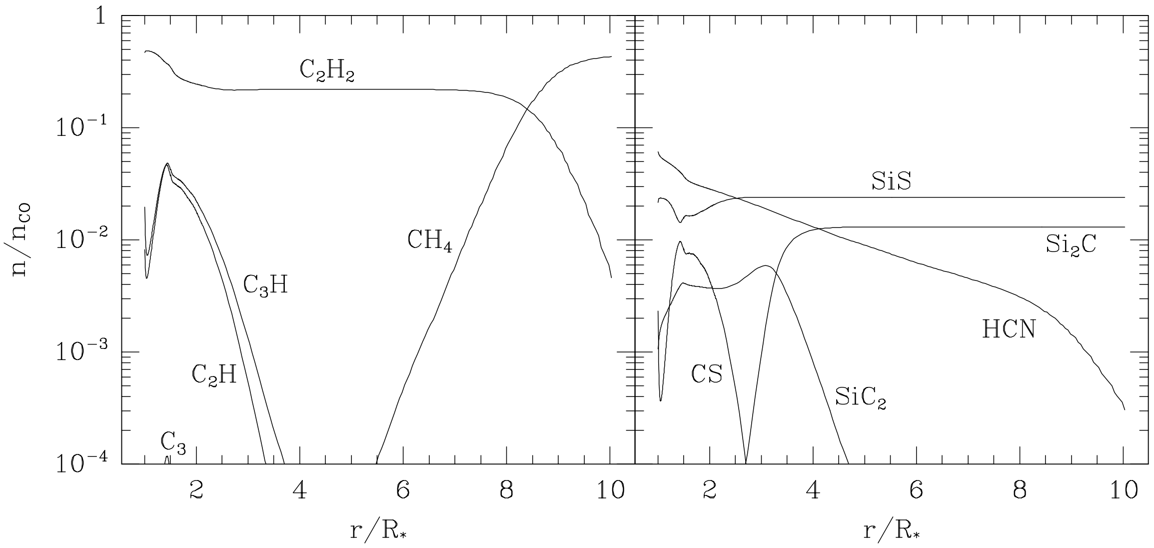

Abbildung 1.1: Radialer Verlauf der chemischen Häufigkeiten (normiert auf n_{CO}) für ein typisches Sternhüllenmodell

Kapitel 2

Numerisches Lösungsverfahren

Bei der Lösung von Randwertproblemen gewöhnlicher DGL'en gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten der grundsätzlichen Herangehensweise: zum einen implizite Relaxationsverfahren, zum anderen explizite Schießverfahren. Die Diskussion beschränkt sich im folgenden auf letztere, da Relaxationsverfahren bereits eine gewisse Kenntnis über die Lösung voraussetzen, damit ein Startmodell für die Iteration konstruiert werden kann. Dieses Startmodell darf nicht zu weit von der wahren Lösung entfernt sein, da sonst die Iteration nicht konvergiert. Außerdem sind Relaxationsverfahren weniger flexibel in Bezug auf Änderung oder Hinzufügung einer DGL, weil alle Ableitungen in der Funktionalmatrix neu berechnet werden müssen und ein neues Startmodell benötigt wird.

Das in Abschnitt 1.2 beschriebene DGL-System und seine Randbedingungen weisen nun einige Besonderheiten auf, die eine „straight-forward"-Lösung erschweren. Die auftretenden Probleme bei einer numerischen Implementation und Möglichkeiten sie zu bewältigen werden in diesem Kapitel ausgeführt.

2.1 Lösungsfeld der Windgleichung

Die Windgleichung (1.21) bzw. (1.22) ist prinzipiell von der Form

$$\frac{dv_g}{dr} = \frac{Z}{N} \tag{2.1}$$

wobei der Zähler durch $Z = v_g \Phi$ und der Nenner durch $N = v_g^2 - c^2$ gegeben ist. Die dazugehörige Lösungstopologie entspricht einem Sattelpunkt und wurde zuerst von Parker (1960) untersucht. Eine schematische Darstellung ist in Abb. 2.1 wiedergegeben.

Es gibt zwei singuläre Lösungen (1 und 2) und vier Lösungsscharen (Nummer 3 bis 6), von denen aber zwei (3 und 5) keine physikalische Bedeutung haben, weil sie keine eindeutigen Funktionen von r sind. Für die einen Sternwind beschreibende Lösung ergeben sich aus den Beobachtungen die Einschränkungen, daß es ein Unterschallregime in Sternnähe und ein Überschallregime in großer Entfernung vom Stern gibt. Die Lösungen 2 und 6 scheiden also aus, weil sie hohe Geschwindigkeiten an der Sternoberfläche liefern und nicht in den hydrostatischen Grenzfall im Sterninnern übergehen. Die sogenannte Brisenlösung (4) erfüllt nicht

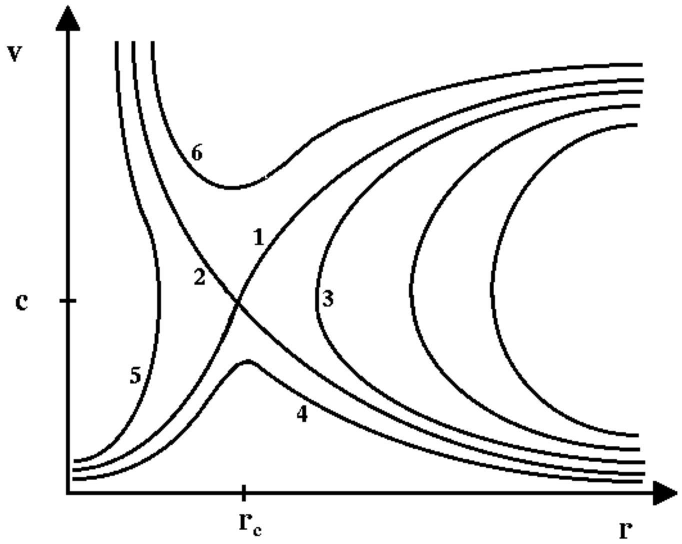

Abbildung 2.1: Lösungsfeld der Windgleichung

die vorgegebene Einschränkung, daß die Expansiongeschwindigkeit in größerem Sternabstand größer als die Schallgeschwindigkeit sein soll.

Die gesuchte Lösung (1) geht von kleinen Geschwindigkeiten an der Sternoberfläche aus, wo die Materie annähernd im hydrostatischen Gleichgewicht ist. Die Expansionsgeschwindigkeit des Windes steigt dann mit dem Radius und überschreitet schließlich am kritischen Punkt $r = r_c$ die Schallgeschwindigkeit (Schallpunkt). Von diesem Typ gibt es genau eine Lösung, sie geht nicht durch Grenzwertbildung aus den Lösungsfamilien hervor und wird durch die Bedingung charakterisiert, daß Z und N am Schallpunkt gleichzeitig Null sind. Dies ist die (innere) Randbedingung der Windgleichung (vgl. Gl. (1.40)). Der Geschwindigkeitsgradient ist in diesem Falle endlich und ungleich Null.

Da nun sowohl $Z \to 0$ als auch $N \to 0$ für $r \to r_c$ gelten soll, wird jede numerische Integration am Schallpunkt instabil. Deshalb berechnet man die Ableitung von v_g in der Umgebung des kritischen Punktes gemäß der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{r\to r_c} \frac{dv_g}{dr} = \frac{\lim_{r\to r_c} dZ/dr}{\lim_{r\to r_c} dN/dr} \qquad (2.2)$$

Weil zur Bestimmung der Ableitungen von Z und N der Temperaturgradient benötigt wird, der selbst wiederum von dv_g/dr abhängt, handelt es sich bei (2.2) um eine implizite Gleichung, die durch zwei ineinander geschachtelte Fixpunktiterationen für dT_g/dr und dv_g/dr gelöst wird.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, daß benachbarte Lösungen der Windgleichung bei einer Integration in Richtung auf den Schallpunkt hin stark divergieren. Es besteht somit eine starke Empfindlichkeit der Lösung auf kleine Änderungen des Anfangswertes. Dieses Phänomen bezeichnet man als inhärente Instabilität. Umgekehrt konvergieren benachbarte Lösungen bei einer Integration vom Schallpunkt fort stark.

2.2 Schießverfahren

Schießverfahren beruhen auf folgenden Prinzip: Ausgehend von in der Regel teils bekannten, teils angenommenen Startwerten $y_i(a) = y_{i,0}$ am Intervallrand $x = a$ integriert man das gewöhnliche DGL-System

$$\dot{y}_i = f(x, y_i) \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.3}$$

bis zum Endpunkt $x = b$ („schießen"). Erfüllt die gewonnene Lösung nicht die Randbedingungen bei $x = b$, variiert man die angenommenen Startwerte bei $x = a$ bis Konsistenz erreicht ist, also die Randbedingungen bei $x = b$ „getroffen" werden.

Zwei Gesichtspunkte sind für die Performance eines Schießverfahrens von Bedeutung

1. Die Anzahl der vorgebenen Randbedingungen am Startpunkt a

   Je weniger Startwerte variiert werden müssen, desto schneller wird die Konsistenz mit den Randbedingungen bei $x = b$ erreicht.

2. Die Integrationsrichtung (d. h. $a < b$ oder $a > b$)

   Sie sollte so gewählt sein, daß Lösungen mit benachbarten Startwerten sich im Laufe der Integration weiter annähern. Das verwendete Integrationsverfahren arbeitet dann stabiler.

Aufgrund der inneren Randbedingung des vorliegenden Problems muß das geschilderte einfache Schießverfahren geeignet modifiziert werden. Im folgenden werden zwei Möglichkeiten genannt, eine Mehrzielmethode (Abschnitt 2.2.1) und ein geschachteltes Schießverfahren (Abschnitt 2.2.2).

2.2.1 Eine Mehrzielmethode

Bei dieser Methode wird vom Schallpunkt aus nach innen und außen geschossen. Dabei nutzt man also die in diesem Fall vorliegende Stabilität der Windgleichung aus (s. Abschnitt 2.1). Andererseits ist am Schallpunkt nur eine, die innere Randbedingung (1.40) gegeben. Alle anderen Startwerte und auch der Eigenwert $\dot{M}$ müssen vorgegeben und solange variiert werden, bis die Randbedingungen an der Sternoberfläche und im unendlichen erfüllt werden. Dies reduziert, wie oben ausgeführt, die Performance dieser Mehrzielmethode.

Das wesentliche Problem liegt aber darin, daß sowohl die Staub-Bewegungsgleichung (1.25) als auch die DGL für die Gastemperatur (1.28) bei einer Integration nach innen inhärent instabil sind. Im Intervall $[R_*, r_c]$ läßt sich also keine Integrationsrichtung angeben, die bei allen DGL'en ein stabiles Verhalten bewirkt. Eine größeren Stabilität der Mehrzielmethode in diesem Intervall ist somit nicht gegeben, das Verfahren wurde nicht weiter verfolgt.

2.2.2 Ein geschachteltes Schießverfahren

Diese Methode ist bereits von Gail und Sedlmayer (1985) angewendet und beschrieben worden. Man nutzt dabei aus, daß an der Sternoberfläche alle Startwerte außer der Gasgeschwindigkeit v_g und dem Eigenwert $\dot{M}$ vorgegeben sind (vgl. Abschnitt 1.2).

Durch Variation der Startgeschwindigkeit $v_{g,0} = v_g(R_*)$ versucht man zunächst für eine vorgegebene Massenverlustrate $\dot{M}$, den Schallpunkt zu treffen, also die innere Randbedingung (1.40) zu erfüllen. Dies ist das innenliegende Schießverfahren. Dann wird gemäß de l'Hospital (2.2) durch den Schallpunkt integriert und schließlich bis zu einem hinreichend großen Radius $r_\infty = 30\,R_*$. Ist die Randbedingung $\tau_L(r_\infty) = 0$ nicht erfüllt, wiederholt man die ganze Prozedur mit einer variierten Massenverlustrate $\dot{M}$, bis $\dot{M}$ auf 10^{-6} genau bestimmt ist. Dies ist das äußere Schießverfahren.

Bei den durchgeführten Modellrechnungem wird der Schallpunkt als getroffen betrachtet, wenn gleichzeitig die Bedingungen

$$\frac{|v_g - c_S|}{c_S} < 10^{-3} \tag{2.4}$$

und

$$\frac{|\Phi_S|}{GM_*/r^2} < 10^{-3} \tag{2.5}$$

erfüllt sind. Die Integration durch den Schallpunkt erfolgt dann solange

$$\frac{v_g - c_S}{c_S} < 3 \cdot 10^{-3} \tag{2.6}$$

gilt.

Die Variation des Startwerts $v_{g,0}$ und des Eigenwerts $\dot{M}$ erfolgt nicht willkürlich sondern im Falle der Gasgeschwindigkeit durch ein Bisektionsverfahren, bei dem die gesuchte Lösung immer durch jeweils eine Lösung der Scharen 4 und 5 (s. Abb. 2.1) eingeschlossen ist. Falls sich die Lösungen vom Typ 4 und 5, welche die wahre Lösung einschließen, im Intervall $[r_{start}, r_{new}]$ um weniger als 10^{-4} unterscheiden, kann der Integrationsstartpunkt von r_{start} nach r_{new} verschoben werden. Die Massenverlustrate $\dot{M}$ wird gemäß dem Algorithmus von van Wijngaarden, Dekker und Brent [Press *et al.* 1986] variiert.

Beim innen liegenden Schießverfahren werden bei der Wahl der Intervallgrenzen des Bisektionsverfahrens für die Startgeschwindigkeit $v_{g,0}$ die Information aus früheren Durchläufen des äußeren Schießverfahrens berücksichtigt. Bei zunehmender Eingrenzung des Eigenwerts $\dot{M}$ sinkt die Anzahl der Versuche im inneren Schießverfahren dadurch erheblich.

Die Integration des DGL-Systems erfolgte bis in die Nähe des Schallpunktes mit einem Extrapolationsverfahren vom Bulirsch-Stoer Typ und dann mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Für beide Verfahren wurden FORTRAN-Routinen aus Press et al. (1986) verwendet, die über eine automatische Schrittweitensteuerung verfügen. Als Parameter für die Schrittweitensteuerung wurde ein lokaler Diskretisierungsfehler der numerischen Lösung von 10^{-8} im Intervall $[R_*, r_c]$ und 10^{-4} im Bereich $[r_c, r_\infty]$ gefordert.

2.3 Gleichgewichtsgrößen und Annäherungszeitskalen

Gewöhnliche DGL'en können eine spezielle Eigenschaft haben, die eine effiziente Integration erschwert oder sogar die Instabilität bestimmter Verfahren bewirkt. Dazu betrachte man das in Abb. 2.2 dargestellte Lösungsfeld. Als konkretes Beispiel kann der Temperaturverlauf eines

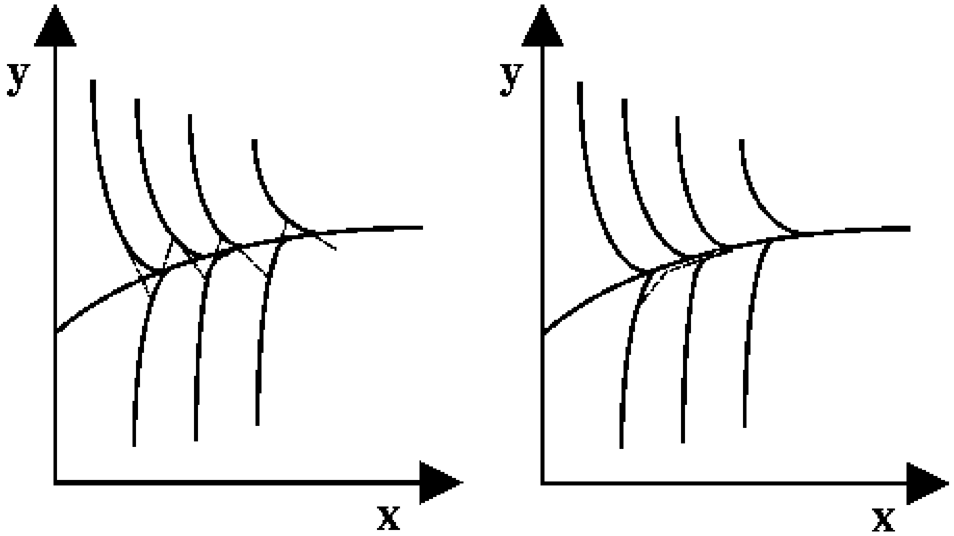

Abbildung 2.2: Vergleich der Stabilitätseigenschaften von expliziten und impliziten Integrationsverfahren

Probekörpers dienen, der in sehr gut wärmeleitenden Kontakt mit einem Wärmereservoir gebracht wird. Unabhängig von den Anfangsbedingungen konvergiert die Temperatur des Probekörpers schlagartig gegen eine Gleichgewichts-Temperatur, die nur noch von eventuellen Temperaturänderungen des Wärmereservoirs abhängt.

Bei der Anwendung eines expliziten Integrationsverfahrens stößt man auch bei gemäßigter Integrationsschrittweite auf das Problem, über die Gleichgewichts-Lösung hinaus zu integrieren, im nächsten Schritt dann eine entgegengesetzte Korrektur vorzunehmen und so im Zick-Zack um die wahre Lösung herum zu integrieren. Im Falle einer fest vorgegebenen Schrittweite kann das Verfahren sogar divergieren. Eine automatische Schrittweitensteuerung hingegen würde minimale Schrittweiten wählen müssen, die dem im Grunde glatten Verlauf der Gleichgewichts-Lösung gar nicht angemessen sind und sehr viel Rechenzeit kosten.

Im Prinzip läßt sich dieses Problem durch ein implizites Integrationsverfahren lösen. Es berücksichtigt die Ableitung am Zielpunkt und bewirkt durch dieses „Voraustasten“ eine Stabilisierung. Implizite Verfahren sind jedoch umständlicher zu programmieren, da sie weniger flexibel in Bezug auf Änderung oder Hinzufügung einer DGL sind, und außerdem rechenzeitintensiv, weil in jedem Integrationsschritt ein System von gekoppelten und i. a. nichtlinearen Gleichungen iterativ zu lösen ist.

Unter bestimmten Bedingungen bietet sich eine einfachere Vorgehensweise an, die im folgenden Unterabschnitt dargestellt wird.

2.3.1 Gleichgewichtsgrößen

Die beschriebenen Schwierigkeiten treten in dem vorliegenden Problem eines stationären Sternwindes bei der Staub-Bewegungsgleichung (1.25) und der Gastemperatur-DGL (1.28) auf. Die rechte Seite dieser DGL'en ist nämlich eine fast verschwindene Differenz von sehr großen Brems- und Beschleunigungskräften bzw. Kühl- und Heizraten. Dies charakterisiert ein sehr stabiles Gleichgewicht (GG). Bei Abweichungen vom GG nähern sich die entsprechenden Größen v_d und T_g sehr schnell den GG-Werten an.

Es bietet sich folgender Ausweg an: Wenn die Relaxationszeitskala τ_{relax} für die Annäherung an den GG-Wert sehr kurz ist gegen die charakteristische Zeitskala τ_{exp} der Änderung des GG-Wertes, welcher durch die Änderung der äußeren Bedingungen bestimmt ist, so kann man die Relaxation zum GG als praktisch instantan betrachten. In diesem Fall ist es nicht nötig, die entsprechende DGL zu lösen, stattdessen reicht es aus, gleich den GG-Wert zu berechnen. Dieser ergibt sich lokal aus einer i. a. nichtlinearen GG-Bedingung der Form

$$-\frac{GM_*\rho_d}{r^2} + f^d_{rad} - f_{drag} = 0 \tag{2.7}$$

bzw.

$$-\frac{2}{f}\frac{T_g}{v_g}\left(\frac{2v_g}{r} + \frac{v_g\Phi}{v_g^2 - c^2}\right) + \frac{2}{f}\frac{\mu m_H}{\rho_g k v_g}(q_{rad} + q_{fric} + q_{acc}) = 0 \tag{2.8}$$

Dieses Vorgehen führt im Falle der Staubgeschwindigkeit auf die Berechnung der sogenannten GG-Driftgeschwindigkeit und entspricht der häufig angenommenen vollständigen Impulskopplung zwischen Staub und Gas [Gilman 1972].

Die beiden Bedingungen (2.7) und (2.8) sind nicht unabhängig voneinander und müssen gleichzeitig erfüllt sein. Da sich (2.7) in eine quadratische Gleichung für die Staubdriftgeschwindigkeit umformen läßt und für gegebenes T_g explizit lösbar ist, wurde sie in eine iterative Nullstellensuche von (2.8) eingesetzt, welche gemäß dem van Wijngaarden-Dekker-Brent-Algorithmus [Press *et al.* 1986] bis zu einer geforderten relativen Genauigkeit von 10^{-12} erfolgte.

Dieser Verzicht auf eine Integration der beiden DGL'en und die Ersetzung von v_d und T_g durch ihre entsprechenden GG-Größen wurde vorgenommen, solange das Verhältnis τ_{relax}/τ_{exp} jeweils 10^{-4} nicht überschritt. Wird das jeweilige Verhältnis größer, so wird die entsprechende DGL gelöst. Das geschah im Falle der Gastemperatur noch innerhalb des Schallpunktes, bei der Staubgeschwindigkeit gewöhnlich kurz hinter dem Schallpunkt.

2.3.2 Annäherungszeitskalen

Die jeweiligen Expansionszeitskalen τ_{exp}, welche die Änderung der äußeren Bedingungen charakterisieren berechnen sich einfach als Quotient von Radius r und zur betrachteten Komponente gehörigen Geschwindigkeit v_d bzw. v_g. Zur Abschätzung der Annäherungszeitskalen τ_{relax} läßt sich folgende allgemeine Methode angeben:

Man betrachte eine gewöhnliche DGL $\dot{y} = f(t, y)$ mit der GG-Lösung $\mathring{y}$, die definiert ist durch $f(t, \mathring{y}(t)) = 0$. Dann gilt

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{2.9}$$

$$\approx \underbrace{f(t,\overset{\circ}{y})}_{=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\overset{\circ}{y}} (y - \overset{\circ}{y}) \tag{2.10}$$

Ersetzt man die Zeitableitung durch einen entsprechenden Differenzenquotienten, erhält man

$$\frac{y - \overset{\circ}{y}}{\tau_{relax}} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\overset{\circ}{y}} (y - \overset{\circ}{y}) \tag{2.11}$$

$$\tau_{relax} \approx \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\overset{\circ}{y}} \right)^{-1} \tag{2.12}$$

Auf diese Weise ergibt sich für die Staubgeschwindigkeit

$$\tau_{relax} \approx \left(\rho_g \frac{\pi a_d^2}{m_d} \left[v_{rel} + \frac{(v_d - v_g)^2}{v_{rel}} \right] \right)^{-1} \tag{2.13}$$

wobei

$$v_{rel} \equiv \left[\left(\frac{4}{3} v_{th} \right)^2 + v_{Drift}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

Im Falle der Gastemperatur erhält man bei Vernachlässigung nicht dominanter Terme

$$\tau_{relax} \approx \frac{f}{2} \frac{\rho_g k}{\mu m_H} \left[16 \sigma_R \kappa_{B(T_g)}^{rot,ges} T_g^3 + n_{CO} k \left(\frac{h\nu_{10}^{CO}}{kT_g} \right)^2 (n_H C_{10}^{H,CO} + n_{H_2} C_{10}^{H_2,CO}) \exp\left(-\frac{h\nu_{10}^{CO}}{kT_g} \right) \right]^{-1} \tag{2.15}$$

2.4 Entkopplung der Windgleichung von der Gasenergiegleichung

In der bisher beschriebenen Form beträgt die reine CPU-Rechenzeit des Programms auf einer Control Data 4680 mehrere Stunden. Dies liegt im wesentlichen daran, daß durch die beschriebene Überführung der Windgleichung (1.21) und der Gasenergiegleichung (1.26) in die Normalform gewöhnlicher DGL'en die in 2.3 beschriebene, inhärente Instabilität der Gasenergiegleichung, die aus der fast verschwindenden Differenz der Quellterme resultiert, auf die Windgleichung übertragen wird. Das Integrationsverhalten dieser ohnehin empfindlichen weil selbst schon inhärent instabilen Gleichung wird dadurch weiter verschlechtert.

Es zeigt sich jedoch, daß die Rechenzeit um den Faktor 10 verkürzt werden kann, wenn man statt der erwähnten Überführung in die Normalform die Windgleichung von der Gasenergiegleichung entkoppelt, indem man den kritischen Term dc_T^2/dr in der Windgleichung (1.21) auf folgende Weise berechnet:

- Solange im Innenbereich $T_g \approx T_{rad}$ gilt, wird der Term mit Hilfe der Gleichungen (1.10) und (1.13) gemäß der Beziehung

  $$\frac{dc_T^2}{dr} \approx \frac{k}{\mu m_H} \frac{dT_{rad}}{dr} \tag{2.16}$$

  berechnet.

- Falls $|T_g - T_{rad}| > 10^{-4} T_{rad}$ gilt, wird der Term durch den Gradienten einer Parabel durch zwei zurückliegende Stützstellen $(r_i, T_{g,i})$ und das aktuelle Wertepaar (r, T_g) approximiert.

Die relevante Form der Windgleichung ist dann (1.21), d. h. der Schallpunkt ist bei $v_g = c_T$ erreicht. Der Geschwindigkeitsgradient in der Gastemperatur-DGL (1.28) wird entsprechend durch die Verknüpfung von c_T und Φ_T berechnet.

In dieser Form wurden die Modellrechnungen zur Abhängigkeit des Sternwinds von den diversen Parametern durchgeführt (siehe Kapitel 3). Im Rahmen der Rechengenauigkeit ergaben sich keine Unterschiede zu den Resultaten einer Rechnung für das Standardmodell, bei der Wind- und Gasenergiegleichung in Normalform gelöst wurden.

Kapitel 3

Ergebnisse und Diskussion

Für die theoretische Beschreibung stationärer Sternwinde von Roten Riesen wurden zumindest für C-Sterne in den achtziger Jahren detaillierte Modelle entwickelt, die hier zum Vergleich mit den gewonnenen Ergebnissen herangezogen werden sollen. Sie umfassen die Lösung der gekoppelten Gleichungen für Hydrodynamik, Staubbildung und (in vereinfachter Form) Strahlungstransport und liefern u. a. für gegebene stellare Parameter eine selbstkonsistent bestimmte Massenverlustrate $\dot{M}$ [Gail *et al.* 1984, Gail und Sedlmayr 1985, Gail und Sedlmayr 1987a, Gail und Sedlmayr 1988].

Diese Beschreibung wurde von Dominik et al. (1989) durch eine Methode zur Berechnung der Staubgrößenverteilungsfunktion weiterentwickelt. Durch die Einbeziehung eines detaillierten frequenzabhängigen Strahlungstransports ist es inzwischen sogar möglich, das optische Erscheinungsbild des Roten Riesen und seiner Staubhülle selbstkonsistent zu modellieren und mit beobachteten Spektren zu vergleichen [Winters *et al.* 1993].

Die genannten Arbeiten gehen von der Annahme des Strahlungsgleichgewichts und der vollständigen Impulskopplung zwischen Gas und Staub bei vernachlässigbarer Driftgeschwindigkeit der Staubkörner aus. In der vorliegenden Arbeit ermöglicht die Unterscheidung zwischen Gas- und Staubkomponente sowohl unter dem Aspekt der Hydrodynamik als auch der Thermodynamik des Systems die Untersuchung von Kühl- und Heizprozessen sowie der Gültigkeit der vollständigen Impulskopplung. Dabei wird allerdings die Staubbildung nur vereinfacht behandelt, nämlich durch die Näherung eines instantanen Wachstums der Staubkörner und somit durch die faktische Ersetzung der Staubverteilungsfunktion durch eine Deltafunktion um den vorgegebenen Staubkornradius a_d.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst ein Modell eines kühlen C-Sterns vorgestellt und ausführlich diskutiert, und zwar für stellare Parameter, die als typisch anzusehen sind und die auch von Gail und Sedlmayr (1987a) sowie Dominik et al. (1989) angenommen wurden, sodaß ein Vergleich mit den Ergebnissen dieser Arbeiten möglich ist.

Verschiedene Approximationen zur Lösung der Gasenergiegleichung wurden betrachtet. Ein Vergleich der resultierenden Temperaturschichtungen wird in Abschnitt 3.2 vorgenommen. In den darauf folgenden Abschnitten 3.3 und 3.4 wird schließlich die Abhängigkeit der Modellstruktur von dem freien Parameter a_d sowie der Leuchtkraft L_* untersucht.

3.1 Struktur eines typischen Modells

Folgende Parameterwerte wurden für die Konstruktion eines Standardmodells für einen stationären staubgetriebenen Wind um einen C-Stern angenommen

$$\begin{aligned} L_* &= 10^4 L_\odot \\ T_* &= 2000 \text{ K} \\ M_* &= 1\, M_\odot \\ \epsilon_{C,0} &= 2\epsilon_O \\ a_d &= 5 \cdot 10^{-6}\text{cm} \end{aligned}$$

Für die chemischen Häufigkeiten der Elemente H, He, O, N, Fe, Si, Mg, S und Al werden die solaren Häufigkeiten nach Allen (1973) angenommen. Vergleichbare Modellrechnungen von Dominik et al. mit diesen stellaren Parametern haben gezeigt, daß im Radiusbereich um den gewählten Staubkornradius a_d der überwiegende Teil der kondensierten Materie konzentriert ist.

Mit diesen Parametern ergibt sich eine Massenverlustrate von

$$\dot{M} = 4.35 \cdot 10^{-6} M_\odot/\text{yr} \tag{3.1}$$

welche im Bereich der typischerweise bei C-Sternen beobachteten Werte von 10^{-7} bis $10^{-4} M_\odot/yr$ liegt (siehe z. B. Knapp, 1987).

3.1.1 Dynamik

Die dynamische Struktur der Sternhülle ist in Abb. 3.1 dargestellt. Sie zeigt die Gasgeschwindigkeit v_g, die isotherme Schallgeschwindigkeit c_T, die Driftgeschwindigkeit der Staubkörner $v_{drift} \equiv v_d - v_g$ sowie im unteren Teil die wirkenden Kräfte normiert auf die Schwerkraft, nämlich die Impulstransferrate durch driftende Staubkörner f_{drag} und den Druckgradienten grad p.

Der steile Anstieg der Impulstransferrate durch driftende Staubkörner erklärt sich durch die zunehmende Anzahl von Staubkörnern, der Abfall hängt mit der zunehmenden Rötung des Strahlungsfelds zusammen, die den Strahlungsdruck auf den Staub verringert. Es wird ferner deutlich, daß der Wind innerhalb der Staubhülle durch den Druckgradienten beschleunigt wird, außerhalb der Schallpunktes liefert der Druckgradient nur einen geringen Beitrag zur Expansion des Windes.

Die Gasgeschwindigkeit beträgt an der Sternoberfläche einige cm/s, es herrscht also nahezu hydrostatisches Gleichgewicht. Sie steigt dann mit dem Impulstransfer aufgrund der einsetzenden Staubbildung steil an und übersteigt bei $r_c = 1.5\, R_*$ die isotherme Schallgeschwindigkeit, die nur schwach variabel ist und ungefähr 2 km/s beträgt. Jenseits des Schallpunkts bewirkt der Strahlungsdruck auf den Staub zunächst eine weitere Beschleunigung des Windes. Aufgrund der Abnahme von f_{drag} nähert sich v_g einer konstanten Endgeschwindigkeit von 23.3 km/s. Dieser Wert liegt im Bereich der typischerweise bei kühlen Sternwinden beobachteten Expansionsgeschwindigkeiten von 7 bis 30 km/s [Knapp 1987].

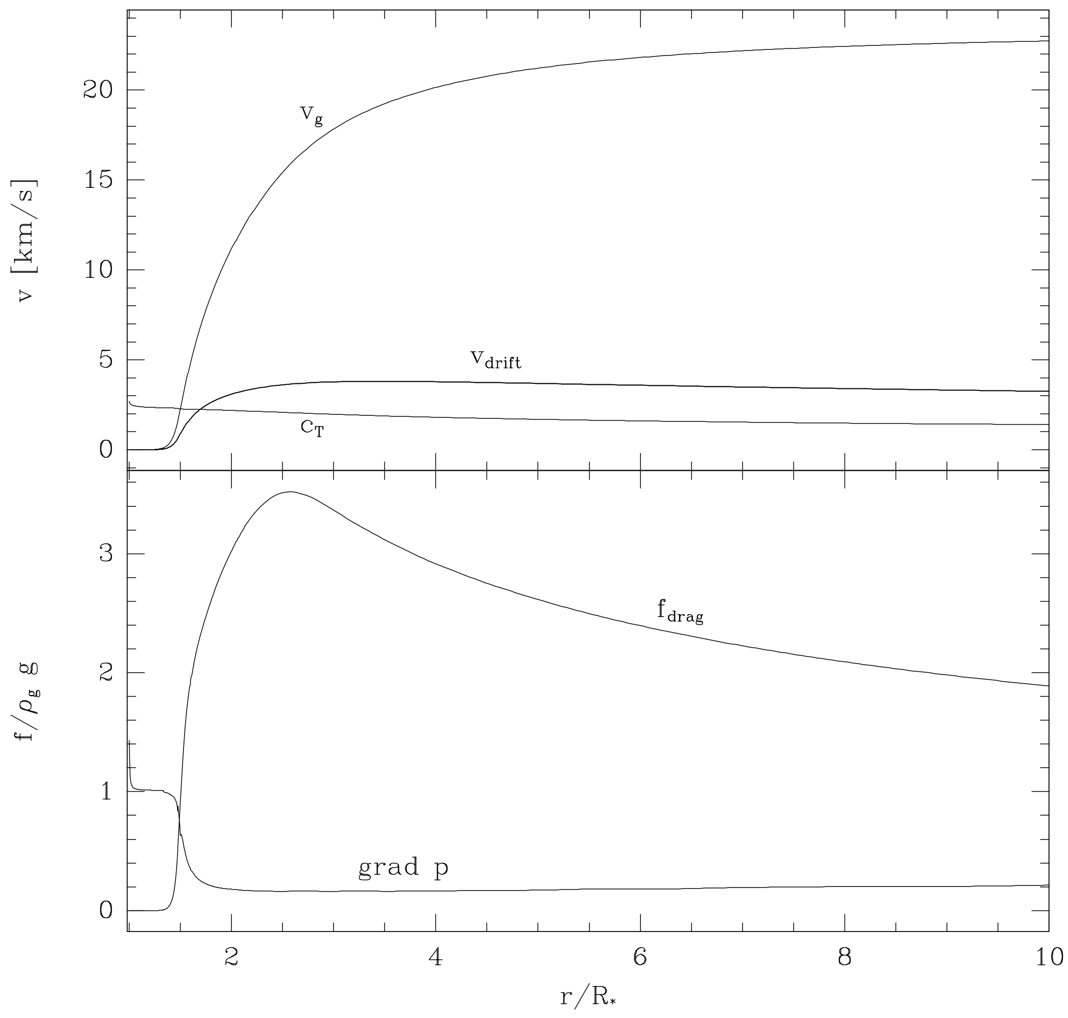

Abbildung 3.1: Geschwindigkeiten und wirkende Kräfte beim Standardmodell

Die Driftgeschwindigkeit des Staubes hängt im wesentlichen von der Gasdichte ab und variiert oberhalb des Schallpunktes nur wenig. Die Werte liegen in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit. Bei größerem Sternabstand kommt es sogar zu einer leichten Abnahme der Driftgeschwindigkeit wegen des verringerten Strahlungsdrucks aufgrund der zunehmenden Rötung des Strahlungsfelds.

3.1.2 Thermodynamik

Abb. 3.2 zeigt den Verlauf von Gas- und Strahlungsgleichgewichtstemperatur T_g bzw. T_{rad} in der Sternhülle sowie die zugrundeliegenden Kühl- bzw. Heizraten bezogen auf die Gasdichte und multipliziert mit dem Quadrat des relativen Sternabstandes $x \equiv r/R_*$. Dargestellt sind die Kühlrate q_{adb} durch Expansion des Gases, die Reibungsheizrate q_{fric} durch drif-

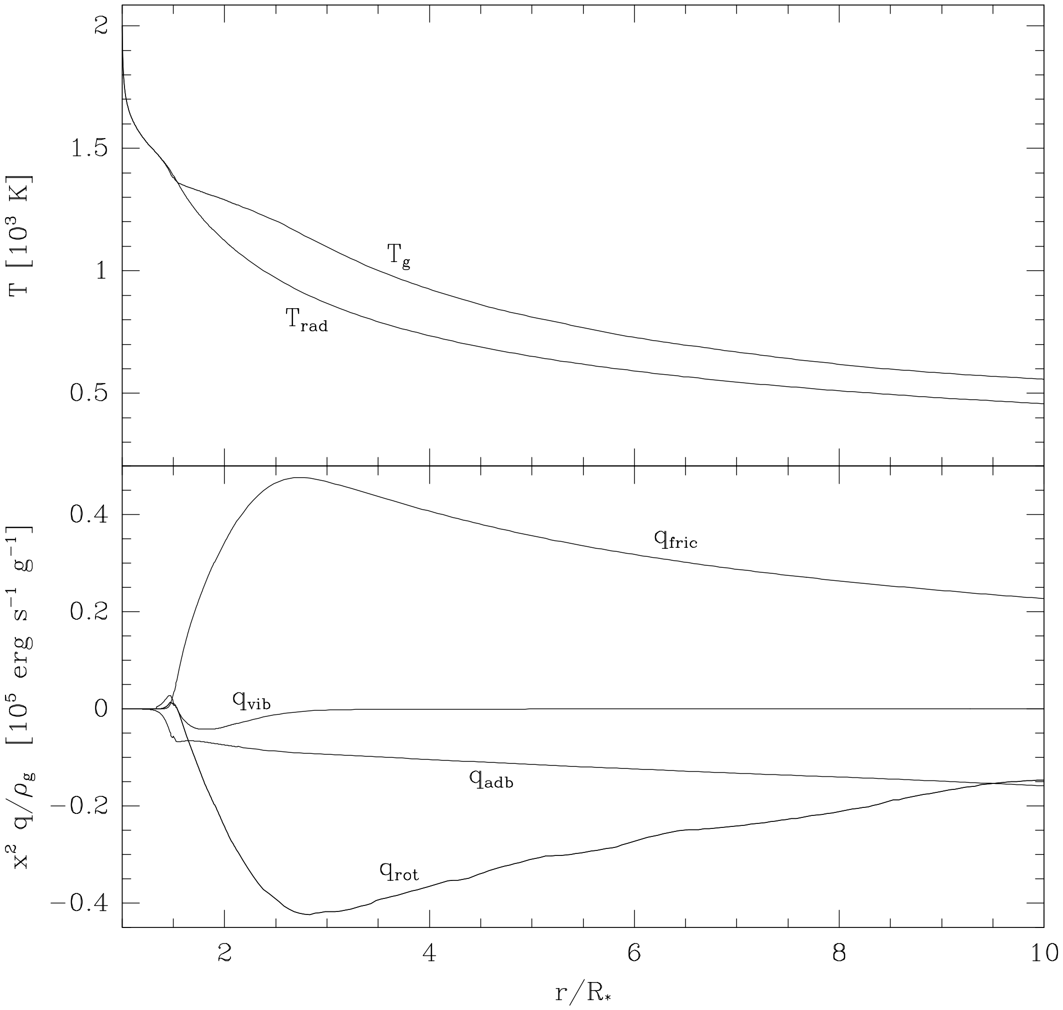

Abbildung 3.2: Temperaturen und wirkende Kühl- bzw. Heizfunktionen beim Standardmodell

tende Staubkörner sowie die Energieaustauschraten mit dem Strahlungsfeld durch Vibrationsübergänge von Kohlenmonoxid q_{vib} und durch reine Rotationsübergänge der betrachteten Moleküle q_{rot}.

Bei hohen Dichten und Stoßraten sind Gas- und Strahlungsgleichgewichtstemperatur zunächst gleich, die Materie befindet sich im Strahlungsgleichgewicht (RE). Kurz vor dem Schallpunkt bewirkt die schnelle Zunahme der Geschwindigkeit und die damit verbundene Expansion eine verstärkte Kühlung, die durch Vibrationsheizung von CO nicht vollständig ausgeglichen werden kann; die Gastemperatur liegt bis zu 12 K unter der Strahlungsgleichgewichtstemperatur. Mit der einsetzenden Staubbildung wird das Gas durch driftende Staubkörner zusätzlich geheizt und schließlich überwiegt jenseits des Schallpunkts die Reibungsheizung q_{fric} durch driftende Staubkörner. Die Gastemperatur liegt bis zu 200 K über der Strahlungsgleichgewichtstemperatur. Die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld bewirkt jetzt eine Kühlung mit der Rate $q_{rad} \equiv q_{vib} + q_{rot}$. Ab ca. 2 R_* wird die Kühlrate von der dichteunabhängigen Rotationslinienkühlung dominiert, und zwar praktisch ausschließlich durch die Moleküle HCN und in geringerem Maße CO. Erst durch die Abnahme der Teilchendichte von HCN relativ zu CO bei großem Sternabstand wird CO-Rotationslinienkühlung zum wesentlichen Strahlungskühler, bleibt aber immer hinter der Kühlung durch Expansion des Gases zurück.

Für sehr große Sternabstände nähert sich die Energiebilanz einem Gleichgewicht zwischen adiabatischer und CO-Rotationslinien-Kühlung einerseits und Reibungsheizung andererseits. Nur diese Kühl- und Heizraten werden üblicherweise bei der Modellierung der $J = 1 \to 0$ Emissionlinienprofile von CO berücksichtigt, mit deren Hilfe die Massenverlustrate aus den Beobachtungen bestimmt werden kann [Kwan und Hill 1977].

Der Energieaustausch q_{acc} durch Akkomodation bei inelastischen Stößen zwischen Gas und Staub ist relativ zu der Energieaustauschrate mit dem Strahlungsfeld durchweg vernachlässigbar.

3.1.3 Staubbildung

Abb. 3.3 zeigt eine graphische Darstellung des radialen Verlaufs der Nukleationsrate J_* und die durch sie verursachte Zunahme der Staubkorndichte n_d (jeweils bezogen auf die gesamte Wasserstoffteilchendichte) sowie der Anteil des Staubes $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ am Massenverlust und die korrespondierende Abnahme der relativen Elementhäufigkeit ϵ_C von Kohlenstoff. Die Massenverlustrate der Staubkomponente berechnet sich durch

$$\dot{M}_d = 4\pi r^2 n_d m_d v_d \tag{3.2}$$

und für den relativen Massenverlust der Staubkomponente ergibt sich, wenn $j \equiv \rho v$ die Massenstromdichte der jeweiligen Komponente bezeichnet,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{M}_d}{\dot{M}_g} &= \frac{j_d}{j_g} && (3.3) \\ &= \frac{\rho_d}{\rho_g}\left(1 + \frac{v_{drift}}{v_g}\right) && (3.4) \end{aligned}$$

Diese Größe wurde zur Darstellung ausgewählt, weil es aufgrund der Driftgeschwindigkeit des Staubes problematisch ist, die Definition eines Kondensationsgrades bei einen Ein-Komponenten-Ansatz einfach auf den Zwei-Komponenten-Ansatz zu übertragen. Der Kondensationsgrad f_{cond} ist üblicherweise durch

$$f_{cond} = \frac{n_d N_d}{n_{\langle H\rangle}\epsilon_{C,0}} \tag{3.5}$$

definiert, wobei N_d die Anzahl der Monomere eines Staubkorns mit dem Radius a_d bezeichnet. Selbst bei vollständiger Kondensation allen verfügbaren Kohlenstoffs bleibt der so definierte Kondensationsgrad bei einer Zwei-Komponenten-Formulierung kleiner als eins, weil die Staubkomponente aufgrund ihrer höheren Geschwindigkeit relativ zu $n_{\langle H\rangle}$ verdünnt wird. Das Verhältnis der Massenstromdichten in Gl. (3.3) ist jedoch unabhängig von der Driftgeschwindigkeit, weil im stationären Fall eine erhöhte Staubgeschwindigkeit v_d eine entsprechend

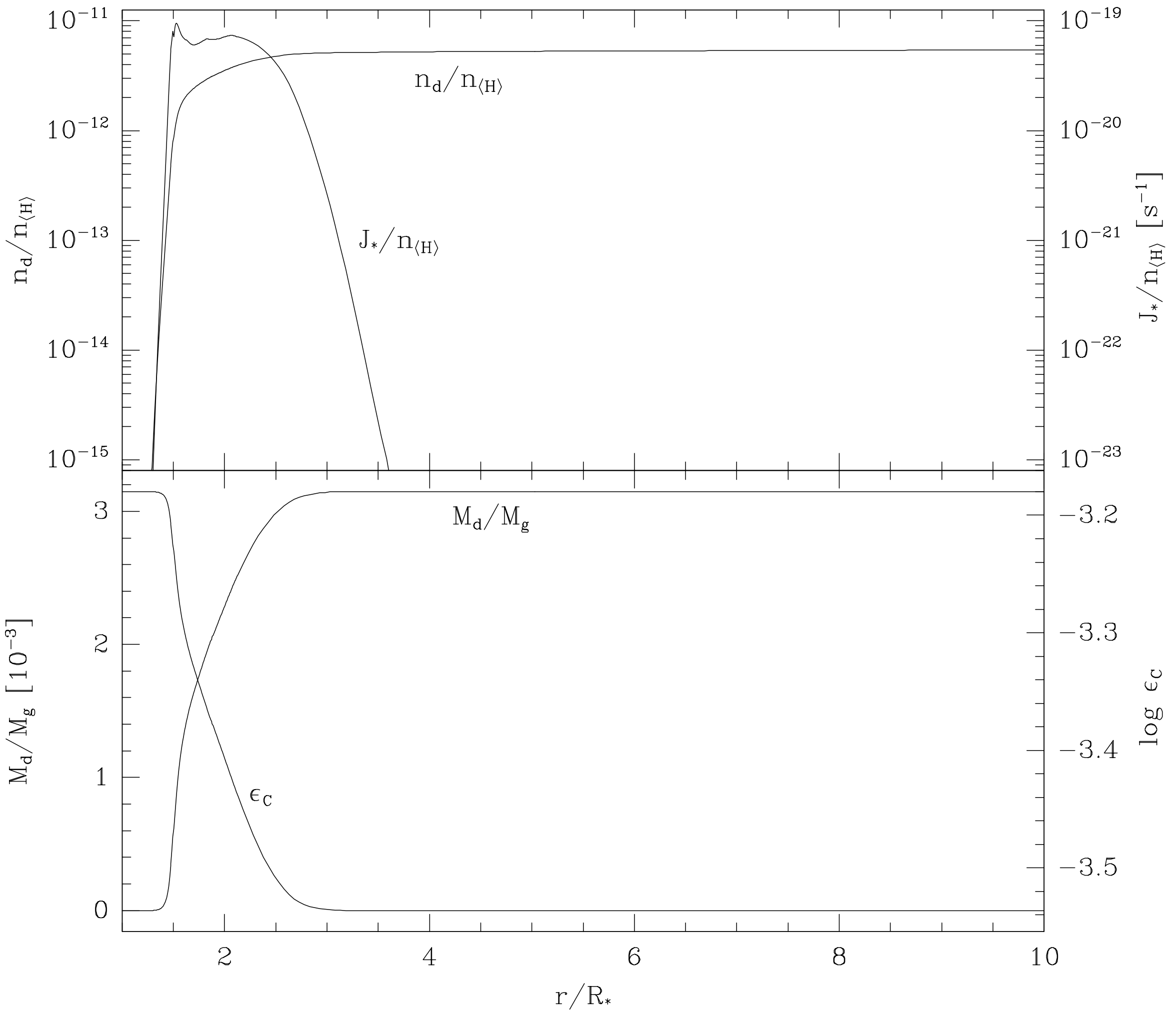

Abbildung 3.3: Radialer Verlauf der Nukleationsrate, der Staukorndichte, der Kohlenstoffhäufigkeit und des relativen Anteils des Staubes am Massenverlust beim Standardmodell

verringerte Staubdichte bewirkt, sodaß die Massenstromdichte konstant bleibt und nur durch die Menge des gebildeten Staubes bestimmt ist.

Wie in den Modellrechnungen von Gail und Sedlmayr (1987a) und Dominik (1992) findet die Staubbildung in einem relativ schmalen Bereich um den Schallpunkt statt. Der Anstieg von $J_*/n_{\langle H\rangle}$ ist durch den Temperaturabfall bedingt, während der Abfall durch eine Kombination von abnehmender Kohlenstoffhäufigkeit und Temperatur verursacht wird. Das Zwischenminimum der Kondensationsrate entsteht, wenn bereits ein relevanter Teil des Staubes gebildet ist und durch Reibungsheizung die Temperatur nur langsam fällt. Dann überwiegt die Abnahme der Kondensationsrate durch die Verringerung der Kohlenstoffhäufigkeit über die Zunahme durch den schwachen Temperaturabfall. Dieses Zwischenminimum bewirkt auch den „Knick“ im radialen Verlauf von ϵ_C und $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ (siehe Abb. 3.3).

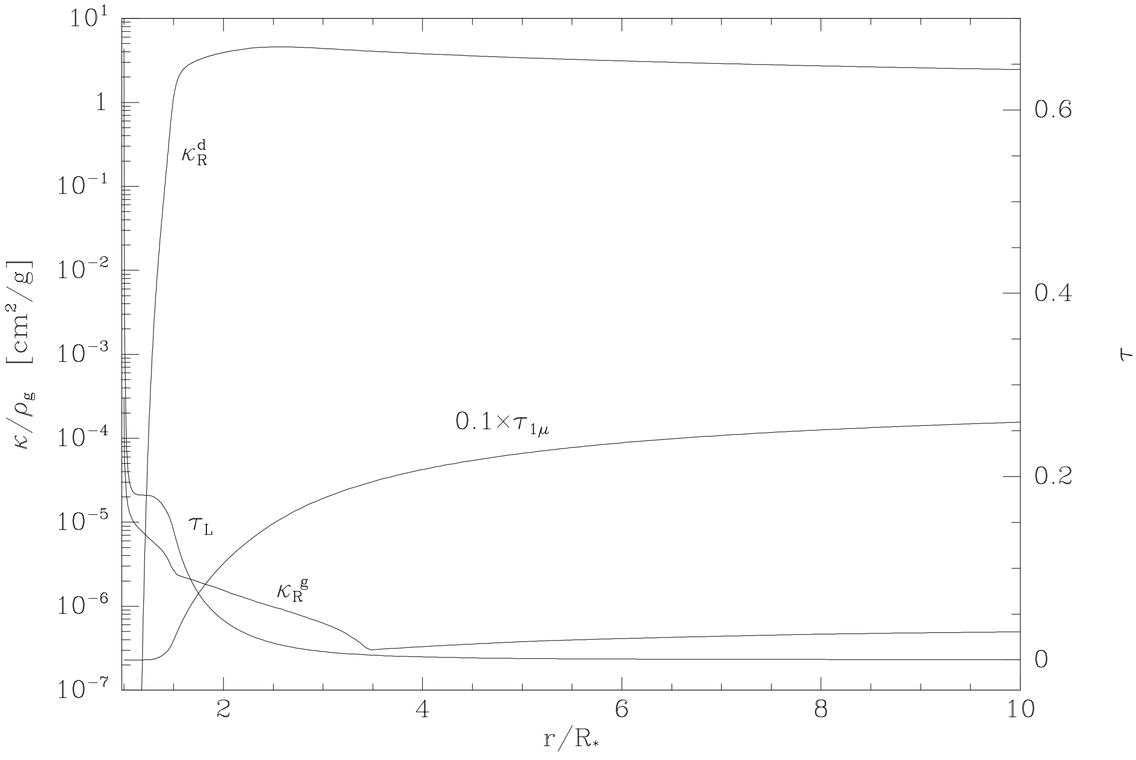

Abbildung 3.4: Radialer Verlauf der optischen Lucy-Tiefe, der optischen Dicke der Staubhülle bei 1 μm sowie der dichtebezogenen Opazitätskoeffizienten von Gas und Staub beim Standardmodell

Das Massenverhältnis von Staub zu Gas liegt mit $3.15\cdot 10^{-3}$ im Bereich der üblicherweise für C-Sterne beobachteten Werten von 10^{-3} bis 10^{-2} [Knapp 1987]. Die Anzahl der Staubkörner pro Gaspartikel steigt bis auf $5.56\cdot 10^{-12}$, während die Kohlenstoffhäufigkeit ϵ_C bis auf $2.91\cdot 10^{-4}$ abfällt.

In Abb. 3.4 sind die dichtebezogenen Rosselandmittel von Gas- und Staubopazitätskoeffizienten dargestellt. Die optische Lucy-Tiefe der Staubhülle $\Delta\tau_L$ beträgt 0.18, die Staubhülle ist im Lucy-Sinne optisch dünn und erfüllt damit die notwendige Voraussetzung für eine sinnvolle Beschreibung des Strahlungstransports im Rahmen der Lucy-Approximation.

Ebenfalls dargestellt ist die optische Dicke der Staubhülle bei $\lambda = 1\,\mu$m. Sie ist definiert durch

$$\tau_{1\mu} = \int_{R_*}^{r} \chi_{1\mu}^{d}\, dr \tag{3.6}$$

Der Opazitätskoeffizient des Staubes ergibt sich nach Ergebnissen der Mie-Theorie für kleine Teilchen ($a_d < \lambda/2\pi$) durch

$$\chi_\lambda^d = n_d\, 4\pi a_d^2\, \frac{2\pi a_d}{\lambda}\, \mathrm{Im}\left\{\frac{m^2-1}{m^2+2}\right\} \tag{3.7}$$

wobei m der komplexe Brechungsindex des Materials ist. Nach experimentellen Ergebnissen von Maron (1990) ist bei $\lambda = 1\,\mu$m für amorphen Kohlenstoff $m = 1.799 + 0.228i$. Die gesamte optische Dicke der Staubhülle beträgt $\Delta\tau_{1\mu} = 2.82$, die Staubhülle ist also bei dieser Wellenlänge optisch dick.

3.1.4 Gültigkeit der vollständigen Impulskopplung

Ein staubgetriebener Wind unterliegt der notwendigen Bedingung, daß der vom Staub aufgenommene Strahlungsimpuls in ausreichendem Maße auf einzelne Gaspartikel übertragen und von diesen gleichmäßig auf das Gas verteilt wird. Gilman (1972) zeigte anhand der Abschätzung charakteristischer Längenskalen, daß diese Impulskopplung sogar vollständig ist. Eine Positionskopplung, also die Annahme von gleicher Staub- und Gasgeschwindigkeit, ist hingegen i. a. nicht gegeben.

Im Gegensatz dazu ergab sich in zwei Untersuchungen eine Verletzung der Annahme der vollständigen Impulskopplung [Berruyer und Frisch 1983, MacGregor und Stencel 1992]. Bei der Arbeit von MacGregor und Stencel bezog sich dies nur auf Massenverlustraten $\dot{M} < 10^{-8} M_\odot/yr$. Wie aber schon Gail und Sedlmayr (1987b) gezeigt haben, ist bei solch niedrigen Massenverlustraten ein rein staubgetriebener Wind nicht möglich.

Berruyer und Frisch fanden auf der Grundlage einer expliziten Zwei-Komponenten-Modellierung eines staubgetriebenen Windes, daß die Impulskopplung in einer sogenannten Grenzschicht am Ort der Staubentstehung stark verletzt ist. Jenseits dieser Grenzschicht gilt die vollständige Impulskopplung und erst in den Außenbereichen der Hülle ($> 100\, R_*$) wird diese Annahme in zunehmendem Maße verletzt. Als Maß dafür wurde die relative Größe des Trägheitsterms

$$\rho_d v_d \frac{dv_d}{dr} \tag{3.8}$$

der Staubbewegungsgleichung (1.25) im Vergleich zu den Beträgen von Brems- und Beschleunigungskräften f_{drag} bzw. f^d_{rad} auf der rechten Seite untersucht. Nur bei vollständiger Impulskopplung ist der Trägheitsterm gegen die Brems- und Beschleunigungskräfte vernachlässigbar und die Driftgeschwindigkeit kann durch das Kräftegleichgewicht (2.7) berechnet werden.

Die dynamische Entkopplung von Gas und Staub bei sehr hohem Sternabstand ist auf die geringe Gasdichte zurückzuführen. Sie hat aber keinen Einfluß auf die Struktur staubgetriebener Sternwinde, da die Beschleunigung der Sternhülle abgeschlossen ist und lediglich eine freie Expansion stattfindet. Die Verletzung der vollständigen Impulskopplung in einer sogenannten Grenzschicht kann jedoch nicht bestätigt werden. Die Ergebnisse von Berruyer und Frisch lassen sich auf eine inkonsistente Modellierung zurückführen. In ihrem Modell wurde nicht nur das stetige Wachstum der Staubkörner vom kritischen Cluster bis zur endgültigen Größe als instantan angenommen, sondern außerdem die Kondensation durch eine schlagartige Zunahme der Staubkorndichte beschrieben, d. h. die Staubbildungsrate durch eine Deltafunktion modelliert. Dabei wurde die Injektionsgeschwindigkeit der gebildeten Staubkörner mit der Gasgeschwindigkeit gleichgesetzt (vgl. Abschnitt 1.1.6). Die Wachstumsphase der Staubkörner wurde also ausgeblendet, ihre Beschleunigung auf die GG-Driftgeschwindigkeit hingegen zeitlich verfolgt.

Dadurch wird zum einen nicht berücksichtigt, daß sich die Staubkörner im Laufe ihres Wachstums langsam auf zunehmend größere GG-Driftgeschwindigkeiten einstellen können,

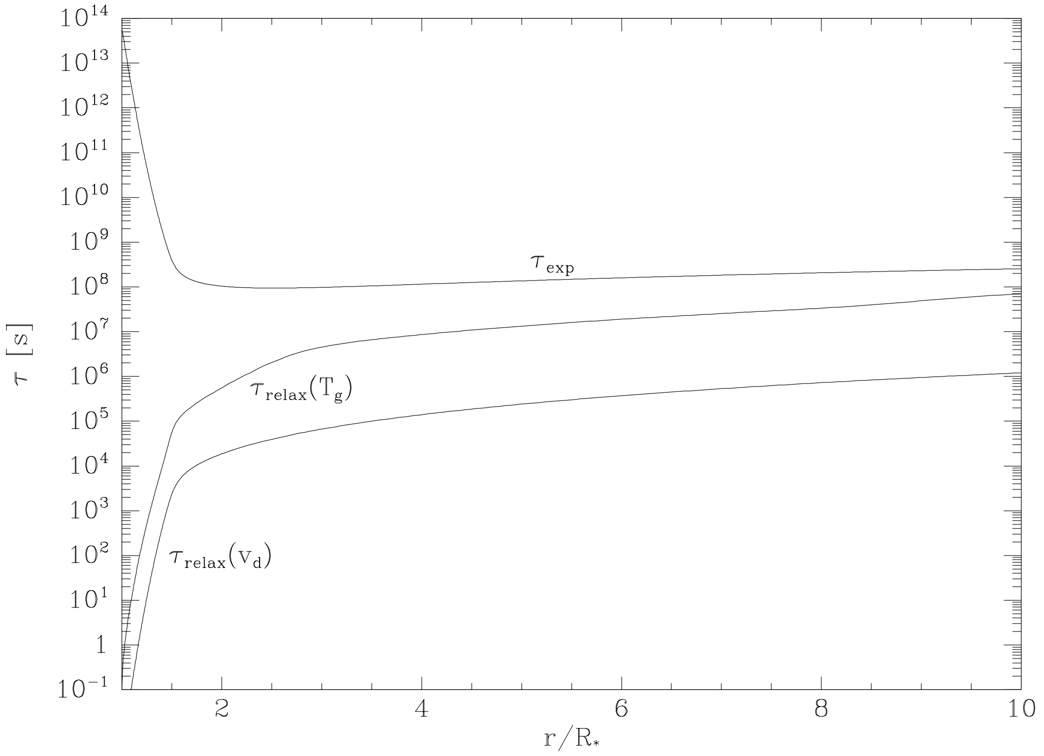

Abbildung 3.5: Radialer Verlauf der Expansions- und Annäherungszeitskalen beim Standardmodell

zum anderen wird nicht beachtet, daß sich bei einer ausgedehnteren Kondensationszone immer nur ein kleiner Teil der Staubkörner (nämlich der gerade gebildete) mit der Injektionsgeschwindigkeit bewegt. Nur für diesen Teil ist die vollständige Impulskopplung eventuell verletzt und dies auch nur für kurze Zeit, weil das Verhältnis von Annäherungszeitskala für die GG-Drift und Expansionszeitskala (definiert in Abschnitt 2.3.2) klein bleibt (siehe Abb. 3.5). Für die Staubkomponente insgesamt ist die vollständige Impulskopplung jedoch erfüllt.

In Abb. 3.6 ist der radiale Verlauf des Verhältnisses

$$\xi \equiv \rho_d v_d \frac{dv_d}{dr} \Big/ f_{rad}^d \tag{3.9}$$

von Trägheits- und Beschleunigungsterm der Staubkomponente dargestellt. Das Verhältnis bleibt kleiner als ca. $3 \cdot 10^{-3}$, vollständige Impulskopplung ist gegeben. Der Abfall von ξ auf Null erfolgt dort, wo der Gradient der Staubgeschwindigkeit v_d verschwindet, weil die Gasgeschwindigkeit nur noch langsam ansteigt, während die Driftgeschwindigkeit vergleichsweise schnell abfällt.

Zum Vergleich wurde ein Modell mit den Standardparametern aus Abschnitt 3.1 berechnet, wobei die Staubgeschwindigkeit jedoch immer als Summe von Gasgeschwindigkeit und der GG-Driftgeschwindigkeit angenommen wurde. Dabei zeigte sich keine signifikante Abweichung vom Standardmodell.

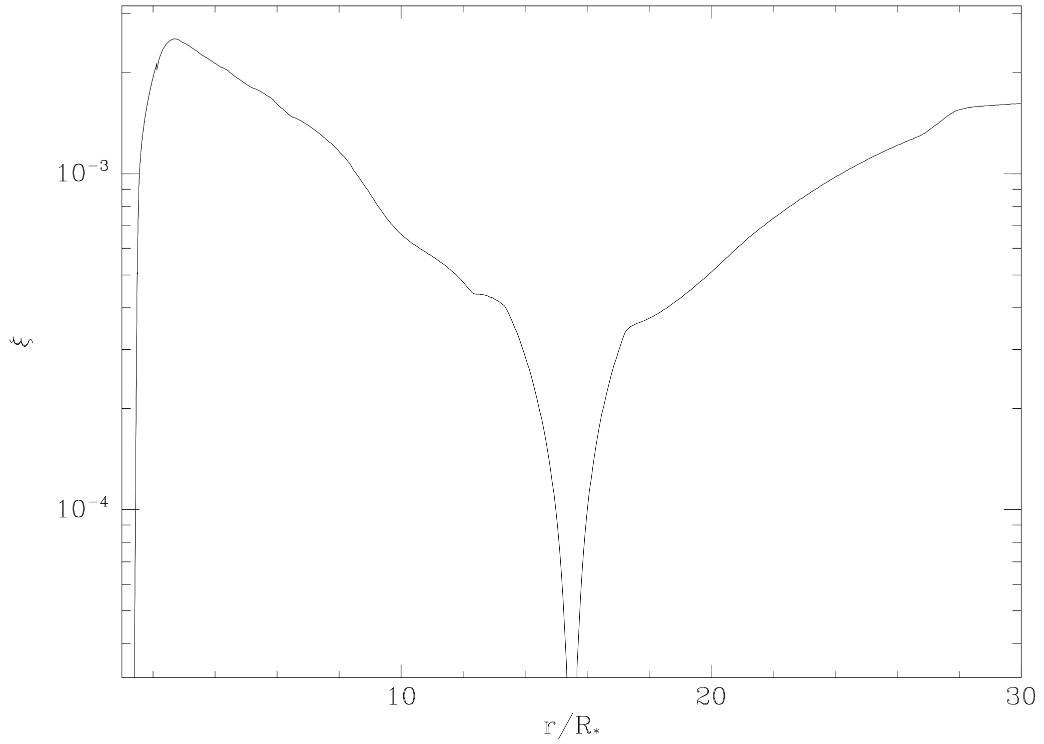

Abbildung 3.6: Radialer Verlauf des Verhältnis von Trägheits- und Beschleunigungsterm der Staubkomponente beim Standardmodell

3.2 Andere Methoden zur Behandlung der Energiegleichung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Modellierung staubgetriebener Winde im wesentlichen durch die Behandlung der Gasenergiegleichung (1.26) erweitert. Für die verwendeten Kühl- bzw. Heizfunktionen wurden in Abschnitt 1.3.3 möglichst realistische Beziehungen abgeleitet. In der Literatur werden häufig bestimmte Näherungen zur Behandlung der Energiegleichung gemacht. Im folgenden werden für die in Abschnitt 3.1 genannten Parameter zwei unter bestimmten Annahmen berechnete Modelle mit dem Standardmodell verglichen.

3.2.1 Die RE- und die LTE-Näherung

In Abschnitt 1.3.3 wurde begründet, daß die Besetzung der Vibrationszustände von CO durch das Strahlungsfeld bestimmt ist, also im non-LTE ist. Macht man dennoch den Ansatz, daß diese Zustände durch Kollisionen, d. h. durch die Gastemperatur, bestimmt sind, also LTE herrscht, so ist die Energieaustauschrate mit dem Strahlungsfeld wie im Falle der reinen Rotationsübergänge durch die Gleichung (1.64) mit $T_{vib} \equiv T_g$ gegeben. Da die Opazitätskoeffizienten für Vibrationsübergänge ungefähr 10^3 mal größer sind als die für reine Rotationsübergänge, ist der Energieaustausch zwischen Gas und Strahlungsfeld dann sehr effektiv.

Nimmt man Strahlungsgleichgewicht (RE) an, so folgt in Rahmen der hier vorgenommenen

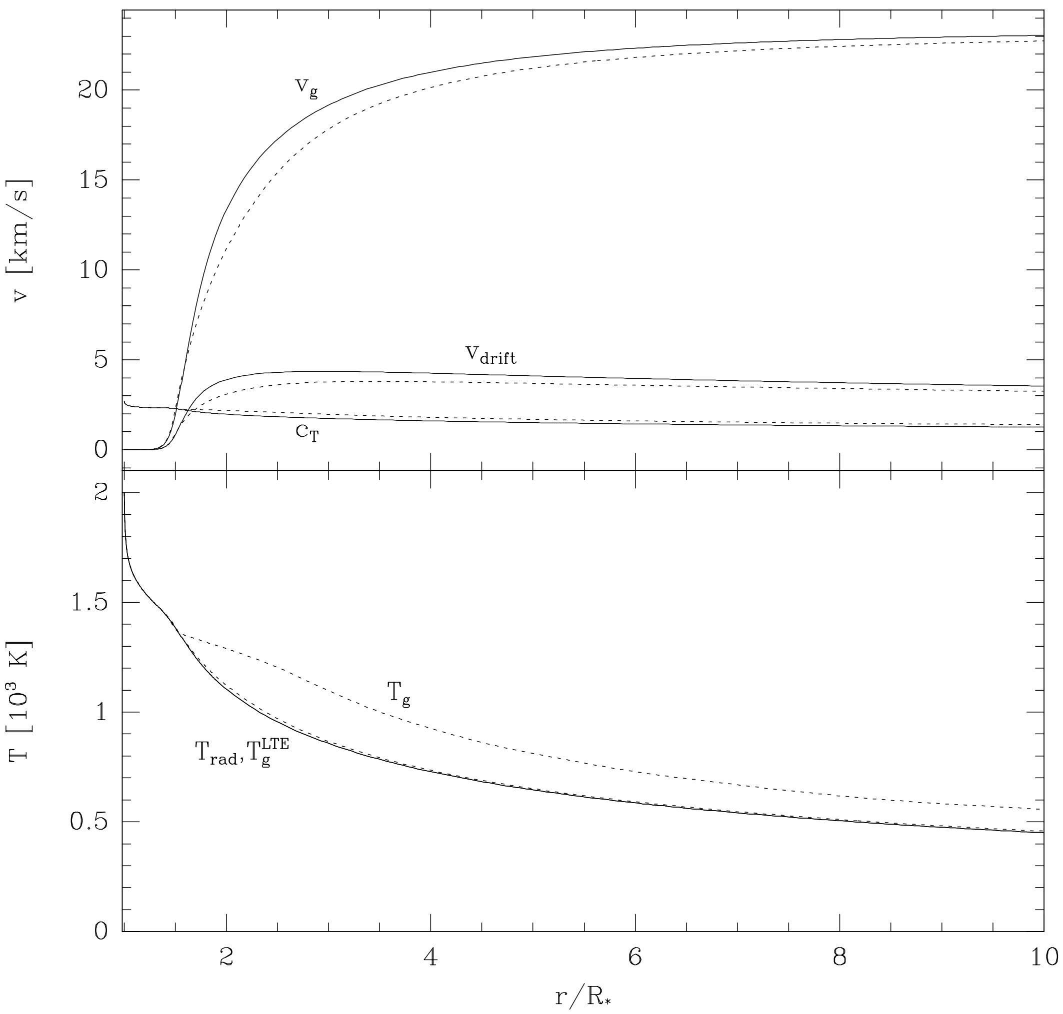

Abbildung 3.7: Vergleich der dynamischen und thermodynamischen Hüllenstruktur von Standardmodell (gestrichelt) und RE- bzw. LTE-Näherung

grauen Näherung, daß die Gastemperatur gleich T_{rad} ist (RE- oder isotherme Näherung). Dies trifft dann auch auf die Anregungstemperaturen zu.

Es zeigt sich, daß die LTE-Näherung der RE-Näherung gleichkommt. Die berechnete Gastemperatur T_g^{LTE} unterscheidet sich praktisch nicht von der Strahlungsgleichgewichtstemperatur, da der Energieaustausch mit dem Strahlungsfeld so effektiv ist. In den Abbildungen 3.7 und 3.8 sind die Geschwindigkeiten und Temperaturen für die beiden Näherungen und das Standardmodell dargestellt. Die zur RE- bzw. LTE-Approximation gehörige Massenverlustrate beträgt $\dot{M} = 3.95 \cdot 10^{-6} M_\odot/\mathrm{yr}$.

Der Vergleich mit dem Standardmodell zeigt, daß die Dynamik des Windes im Grunde richtig wiedergegeben wird. Die Gas- und die Driftgeschwindigkeit sind beim Standardmodell etwas geringer, die Staubbildung ist etwas ausgeprägter. Die entscheidenen Differenzen liegen zum

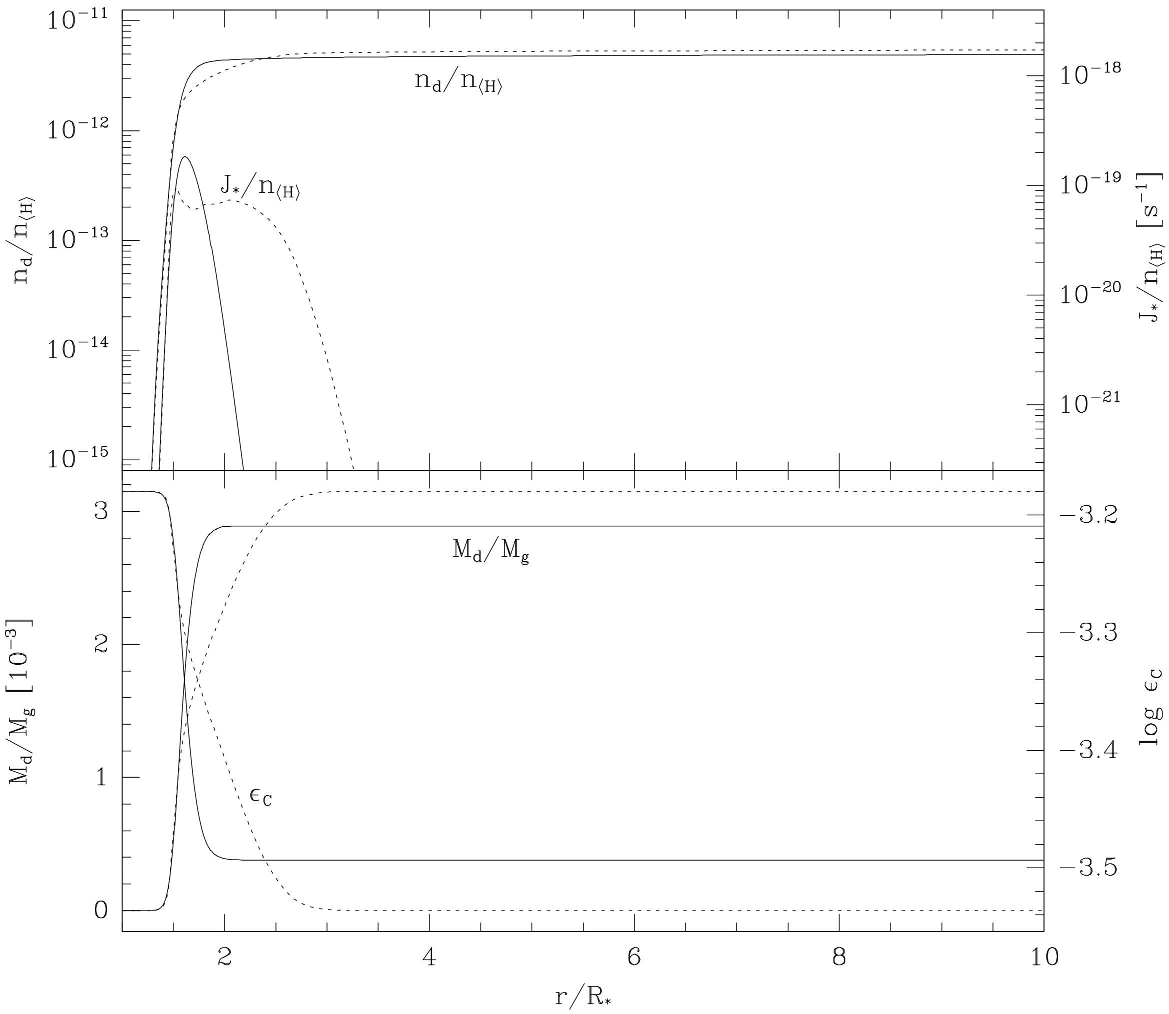

Abbildung 3.8: Vergleich der Staubbildung beim Standardmodell (gestrichelt) und der RE- bzw. LTE-Näherung

einen natürlich beim Verlauf der kinetischen Gastemperatur und zum anderen bei der Lage der Kondensationszone. Der Anstieg der Kondensationsrate wird nach wie vor durch den Abfall der Gastemperatur bedingt, der Verlauf ist für die Modelle anfangs identisch. Sobald sich eine relevante Staubmenge gebildet hat bewirkt die Reibungsheizung im Standardmodell eine verlangsamte Temperaturabnahme; die Kondensation hält bei einem vergleichsweise etwas niedrigeren Wert der Bildungsrate länger an und die Kondensationszone ist beim Standardmodell breiter. Die Einbeziehung von Heizung und Kühlung führt also zu einer Verbreiterung der Staubbildungszone und im Effekt zu einer Verschiebung zu größeren Radien.

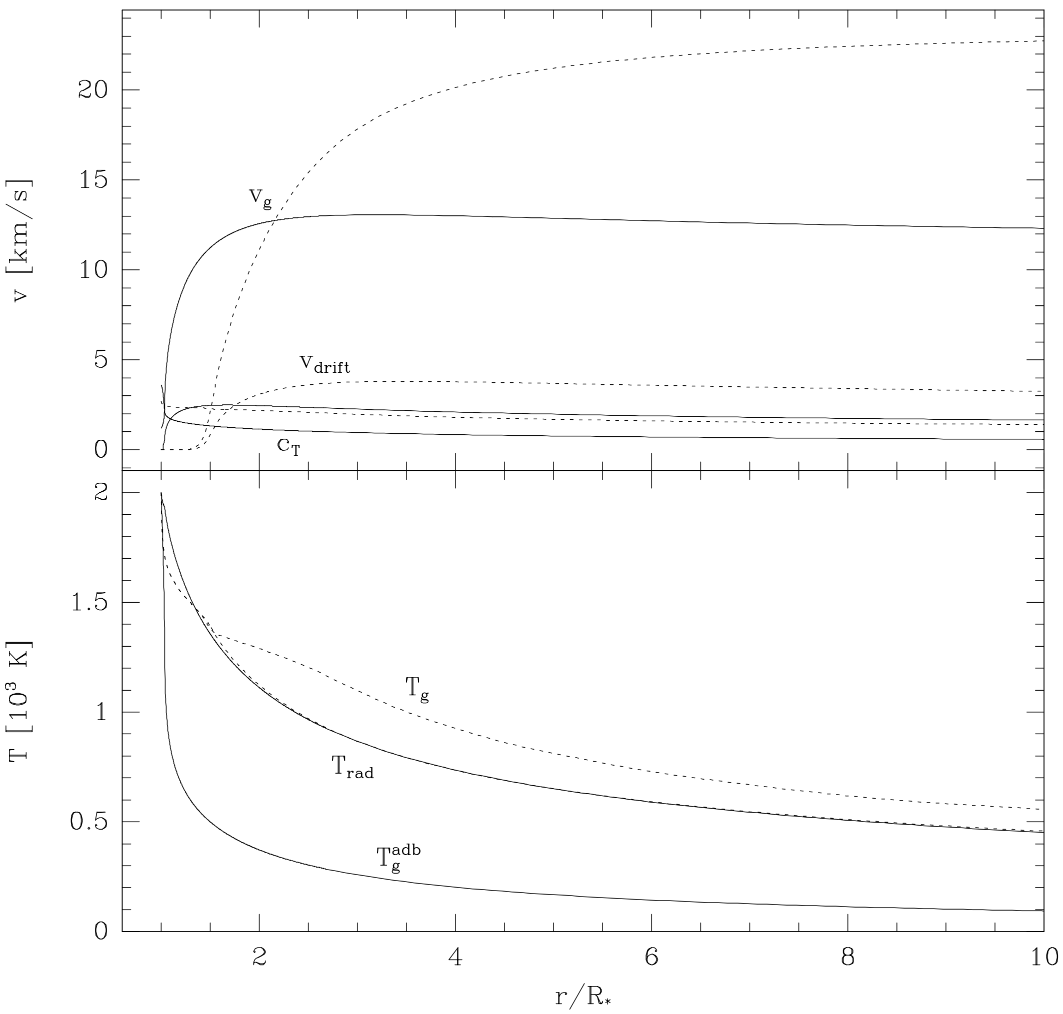

Abbildung 3.9: Vergleich der dynamischen und thermodynamischen Hüllenstruktur von Standardmodell (gestrichelt) und adiabatischer Näherung

3.2.2 Die adiabatische Näherung

Wenn man in der Gasenergiegleichung (1.26) alle Quellterme auf der rechten Seite streicht, beschreibt man eine rein adiabatische Temperaturschichtung. Die Ergebnisse im Vergleich mit dem Standardmodell sind in den Abbildungen 3.9 und 3.10 dargestellt. Die zur adiabatischen Näherung gehörige Massenverlustrate beträgt $\dot{M} = 9.88 \cdot 10^{-6} M_\odot/\mathrm{yr}$.

Der Unterschied zum Standardmodell ist offensichtlich. Der Schallpunkt ist praktisch an die Sternoberfläche gerückt, ein Ergebnis, das auch bei der adiabatischen Modellierung von rein moleküllinienGetriebenen Winden gefunden wurde [Maciel 1977]. Die Gastemperatur T_g^{adb} fällt sehr schnell und liegt bei $r = 1.5\,R_*$ schon unter 500 K. Im Widerspruch zu den Beobachtungen [Sutton *et al.* 1979] findet die Staubbildung in einem *extrem* schmalen Bereich an der Sternoberfläche statt und bewirkt eine katapultartige Beschleunigung des Windes (siehe Abb.

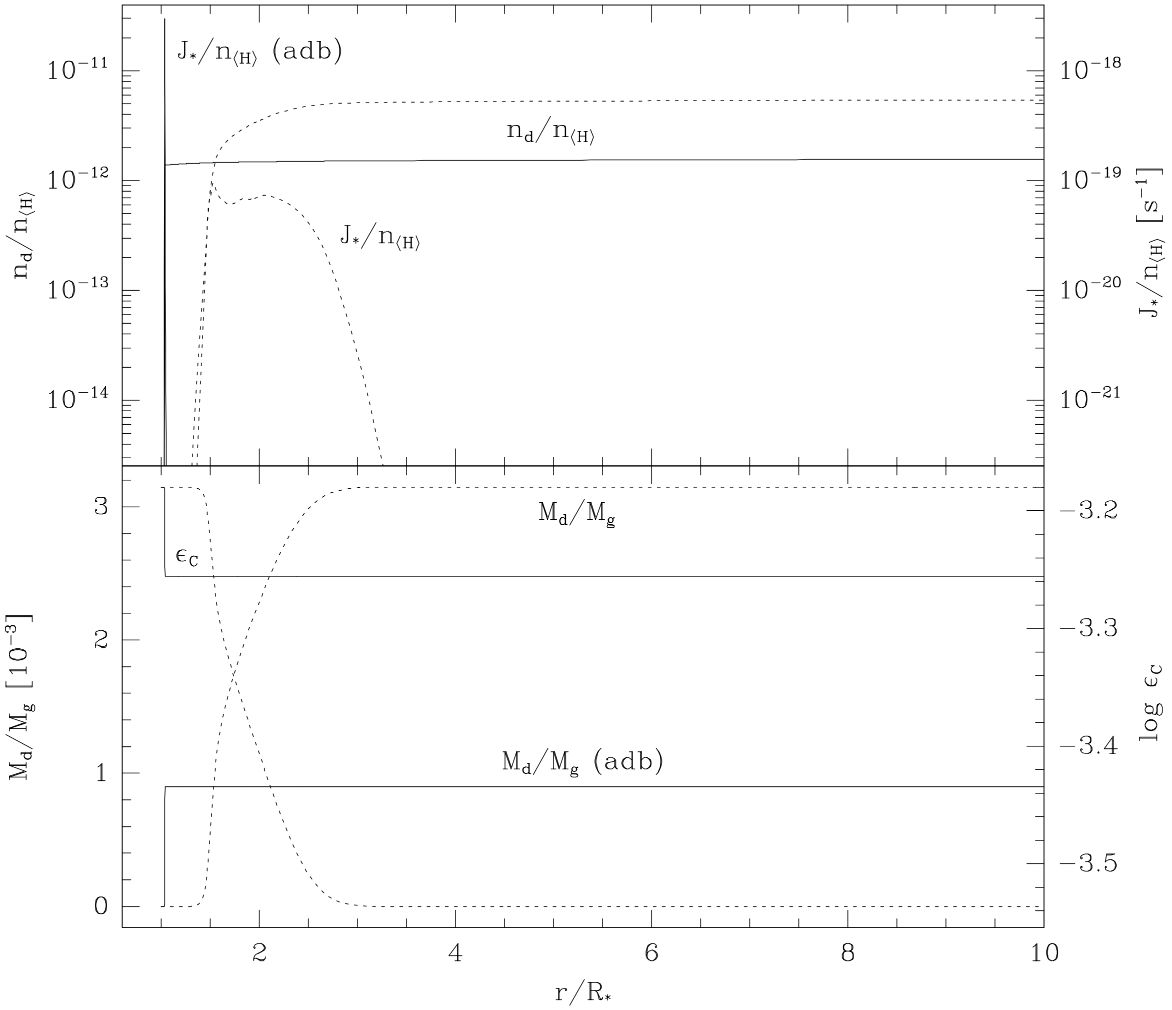

Abbildung 3.10: Vergleich der Staubbildung beim Standardmodell (gestrichelt) und der adiabatischen Näherung

3.9 und 3.10). Die Menge des gebildeten Staubes und deshalb auch die Endgeschwindigkeit des Windes sind geringer als im Standardmodell.

Die adiabatische Näherung führt auf also auf eine Windstruktur, die nicht nur völlig vom Standardmodell abweicht, sondern auch im Widerspruch zu den Beobachtungen steht, und somit ungeeignet ist zur Beschreibung stationärer staubgetriebener Winde.

3.3 Abhängigkeit vom Staubkornradius

Die vereinfachte Beschreibung der Staubbildung durch die Annahme instantanen Wachstums und die damit verbundene Festlegung eines einheitlichen Staubkornradius a_d erfordert es, die

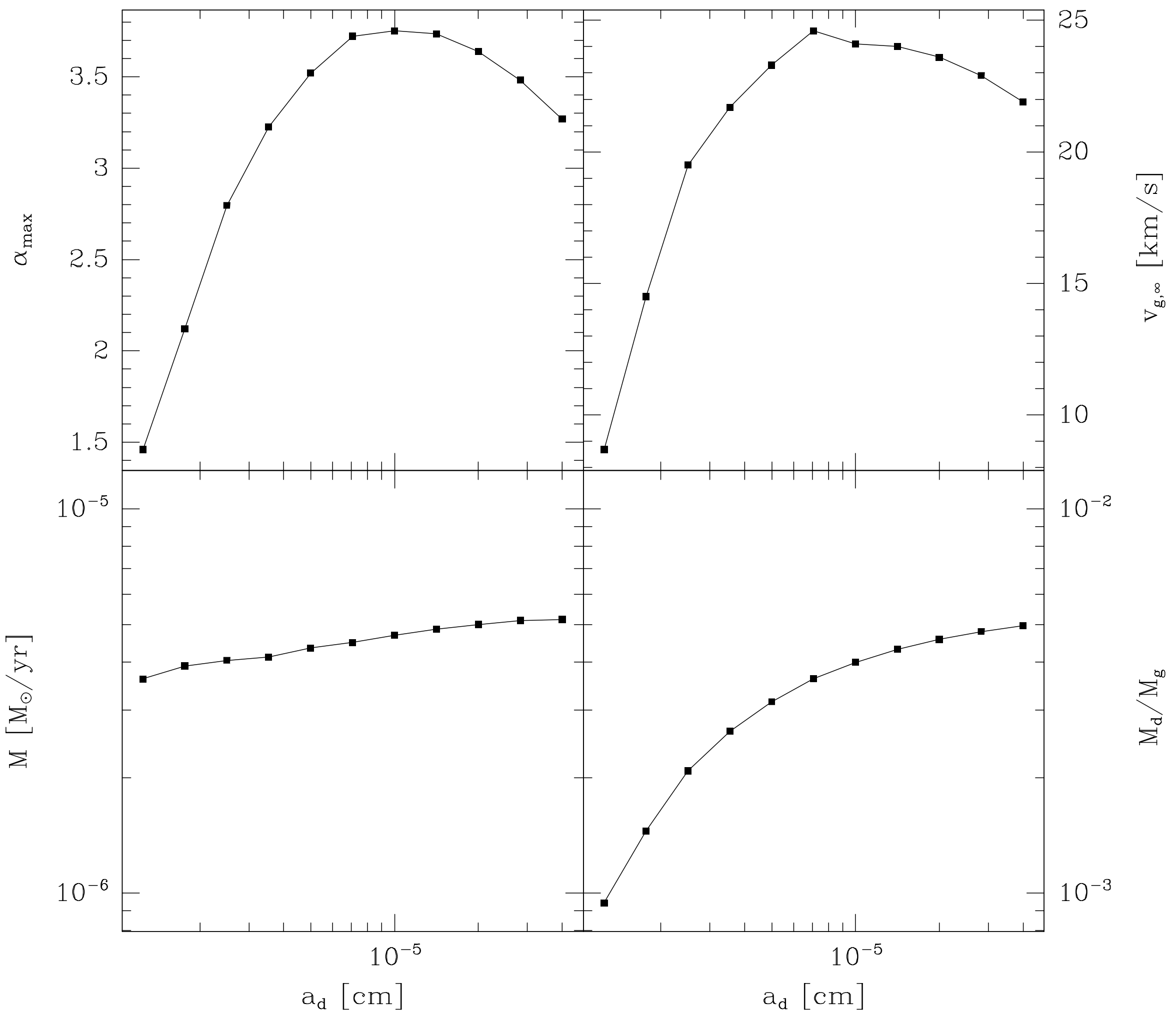

Abbildung 3.11: Abhängigkeit der Kenngrößen (I) von dem Staubkornradius a_d

Abhängigkeit der Windstruktur und gewisser globaler Größen von dem freien Parameter a_d zu untersuchen. Dazu wurden Windmodelle für Staubkornradien zwischen 12.5 nm und 0.4 μm berechnet. Für größere Staubkornradien ist die bei der Berechnung der Opazitätskoeffizienten eingehende Näherung kleiner Teilchen nicht mehr erfüllt (siehe Gl. (1.43)). In diesem Fall wird dann auch die Driftgeschwindigkeit unabhängig vom Teilchenradius.

Prinzipiell zeigt sich, daß auch bei Variation von a_d die grundsätzliche Struktur der Modelle der des Standardmodells gleicht. Das Geschwindigkeitsprofil hat dieselbe Form, der Schallpunkt variiert um weniger als ein Prozent und die Reibungsheizung bewirkt eine deutliche Temperaturerhöhung nach Einsetzen der Staubbildung.

Es ändert sich aber der Betrag gewisser die Modellstruktur charakterisierender Größen (im folgenden kurz Kenngrößen). In den Abbildungen 3.11 und 3.12 ist deshalb die Abhängigkeit folgender Größen vom Staubkornradius wiedergegeben:

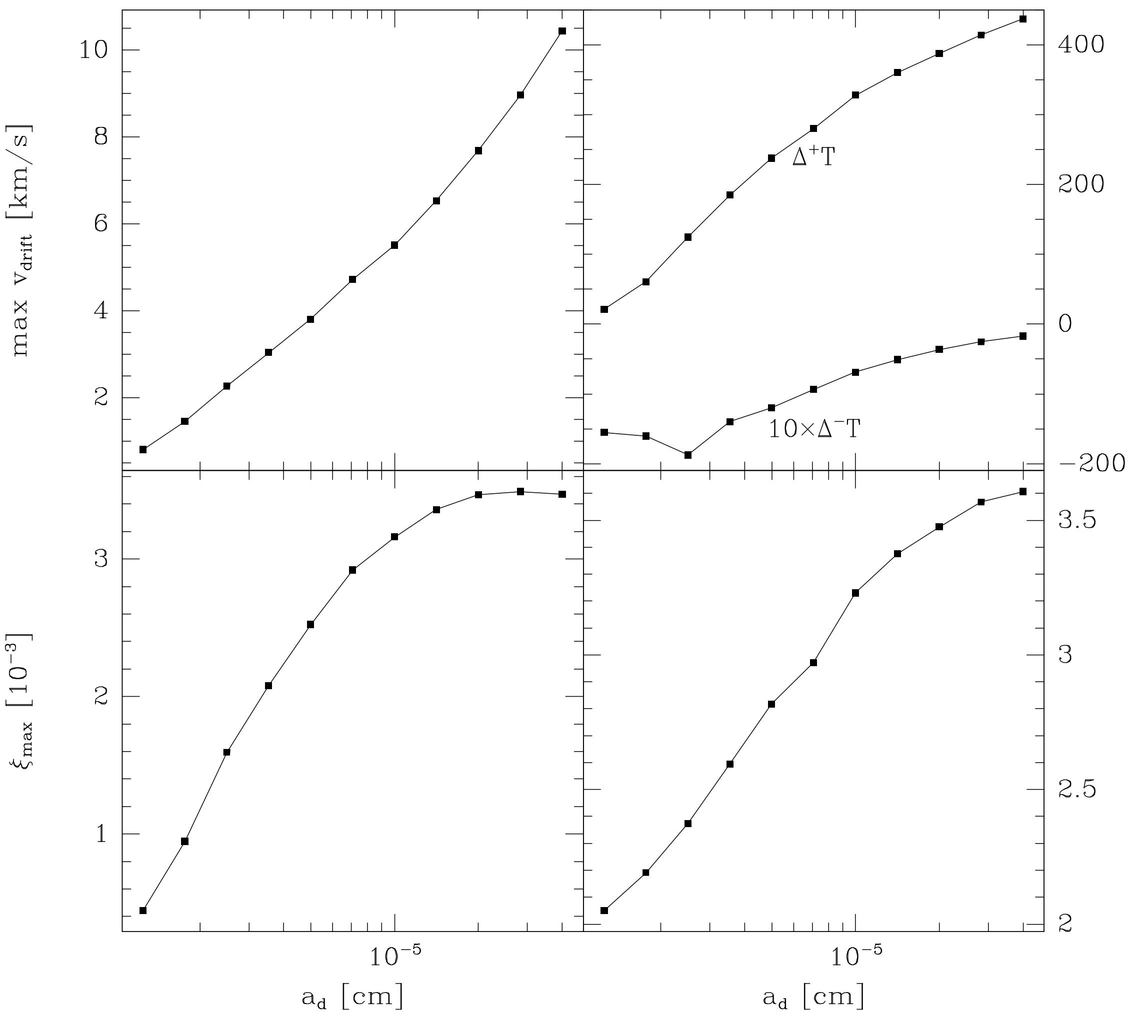

Abbildung 3.12: Abhängigkeit der Kenngrößen (II) von dem Staubkornradius a_d

(I) Abb. 3.11

- Das maximale Verhältnis α_{max} von f_{drag} zu $\rho_g g$
- Die Endgeschwindigkeit des Windes $v_{g,\infty}$
- Die Massenverlustrate $\dot{M}$
- Das Verhältnis von Staub- und Gas-Massenverlust $\dot{M}_d/\dot{M}_g$

(II) Abb. 3.12

- Die maximale Driftgeschwindigkeit v_{drift} des Staubes
- Die maximale positive Abweichung der Gastemperatur von der Strahlungsgleichgewichtstemperatur durch Reibungsaufheizung Δ^+T und die maximale negative Abweichung Δ^-T durch Expansionskühlung innerhalb des Schallpunkts

- Das maximale Verhältnis ξ_{max} zwischen Trägheits- und Beschleunigungskraft der Staubkomponente (vgl. Abschnitt 3.1.4)
- Die optische Dicke der Staubhülle $\Delta\tau_{1\mu}$ bei $\lambda = 1\mu$m

Die Driftgeschwindigkeit steigt stark mit dem Teilchenradius, weil die bremsende Reibungskraft f_{drag} nur proportional zur Fläche und der beschleunigende Strahlungsdruck proportional zum Volumen der Staubkörner ist (siehe Gl. (1.45) und (1.43)). Die Reibungsaufheizung ($\Delta^+ T$) nimmt daher ebenfalls zu, weil sie im wesentlichen vom Quadrat der Driftgeschwindigkeit abhängt (siehe Gl. (1.49)). Die Abkühlung durch Expansion des Gases ist für größere Staubkornradien entsprechend schwächer, da die Reibungsheizung schon bei kleinen Sternabständen überwiegt.

Der Verlauf von $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ zeigt, daß die Menge des kondensierten Staubes für größere Staubkornradien zunimmt. Dies ist bei der vereinfachten Beschreibung der Staubbildung zu erwarten, da bei vergleichbarer Kondensationsrate größere einzelne Teilchen eine größere Gesamtmasse bewirken. Da die Menge kondensierbaren Materials begrenzt ist, kann $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ einen Grenzwert von ca. $5 \cdot 10^{-3}$ nicht überschreiten und der Verlauf geht entsprechend für große a_d in die Sättigung.

Der Anstieg $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ überträgt sich auf die optische Dicke der Staubhülle $\Delta\tau_{1\mu}$ und bei kleinen und mittleren Staubkornradien zunächst auch auf α_{max}, da diese Größe bei Annahme von $f_{drag} \approx f^d_{rad}$ proportional zu χ^d_R und damit zu ρ_d ist (siehe Gl. (1.43)). Bei großen Teilchen überwiegt jedoch die Verdünnung der Staubdichte durch die erhöhte Driftgeschwindigkeit die nur noch schwache Zunahme der Staubmenge $\dot{M}_d/\dot{M}_g$. Die Endgeschwindigkeit des Windes $v_{g,\infty}$ spiegelt den Verlauf von α_{max} wieder, da sie im wesentlichen durch den Impulsübertrag jenseits des Schallpunkts bestimmt wird [Holzer und MacGregor 1986], der durch α_{max} charakterisiert wird.

Die Massenverlustrate hängt von dem Impulsübertrag des innerhalb des Schallpunkts gebildeten Staubes ab [Holzer und MacGregor 1986]. Am Schallpunkt gilt aufgrund der inneren Randbedingung $\Phi(r_c) = 0$ der Windgleichung immer $\alpha \approx 1$. Für die diesem α entsprechende Staubmenge ist es dabei gleich, ob der Staub aus wenigen großen oder vielen kleinen Teilchen besteht. Deshalb nimmt die Massenverlustrate nur schwach mit der im Modell verwendeten Teilchengröße zu.

Die Impulskopplung bleibt für alle Staubkorngrößen gewährleistet, da ξ_{max} im Promillebereich bleibt.

3.4 Abhängigkeit von der stellaren Leuchtkraft

Die Domäne der staubgetriebenen Winde im HRD liegt am Asymptotischen Riesen Ast. Der Entwicklungsweg eines Sterns verläuft dort bei schwach abnehmender Effektivtemperatur von niedrigen Leuchtkräften (einige $10^3\,L_\odot$) zu hohen Leuchtkräften von einigen $10^4\,L_\odot$ [Kippenhahn und Weigert 1990]. Erst beim Übergang zum Planetarischen Nebel und der Freilegung des Weißen Zwergs innerhalb des Roten Riesens nimmt die Effektivtemperatur bei nahezu konstanter Leuchtkraft stark zu.

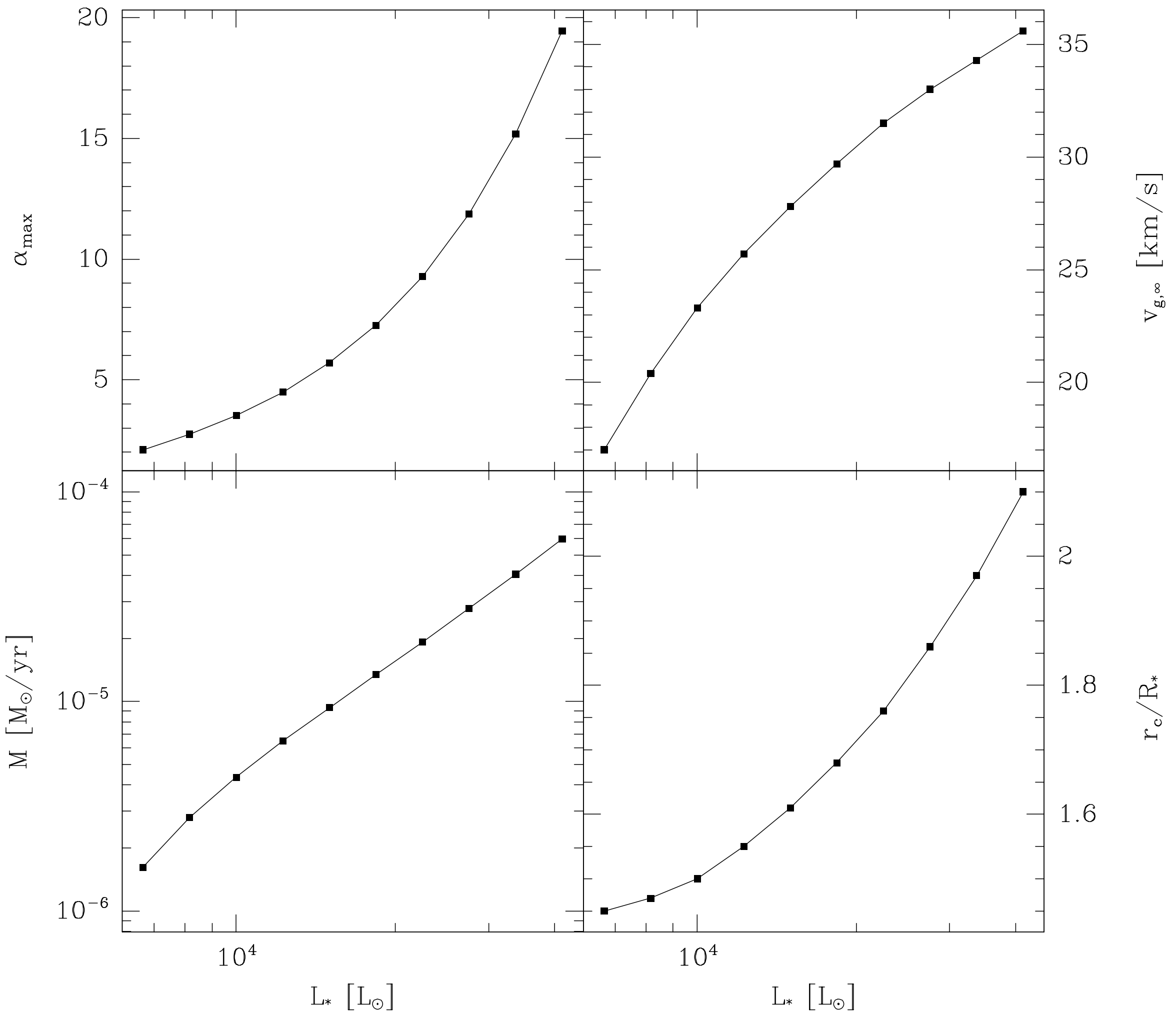

Abbildung 3.13: Abhängigkeit der Kenngrößen (I) von der stellaren Leuchtkraft L_*

Um die Abhängigkeit der Hüllenstruktur vom Entwicklungszustand des Roten Riesens zu untersuchen, wurde die stellare Leuchtkraft L_* bei ansonsten festen Werten der Parameter variiert. Die durchgeführten Modellrechnungen zeigen, daß sich auch hier die qualitative Struktur des Windes nur wenig ändert. Allerdings ist nun das Verhältnis von Staub- und Gas-Massenverlust $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ praktisch von der Leuchtkraft unabhängig, während sich die Position des Schallpunkts signifikant mit L_* ändert.

In den Abbildungen 3.13 und 3.14 ist die Abhängigkeit folgender Kenngrößen von der stellaren Leuchtkraft im Bereich $0.66 \cdot 10^4$ bis $4.13 \cdot 10^4$ $L_\odot$ dargestellt:

(I) Abb. 3.13

- Das maximale Verhältnis α_{max} von f_{drag} zu $\rho_g g$
- Die Endgeschwindigkeit des Windes $v_{g,\infty}$

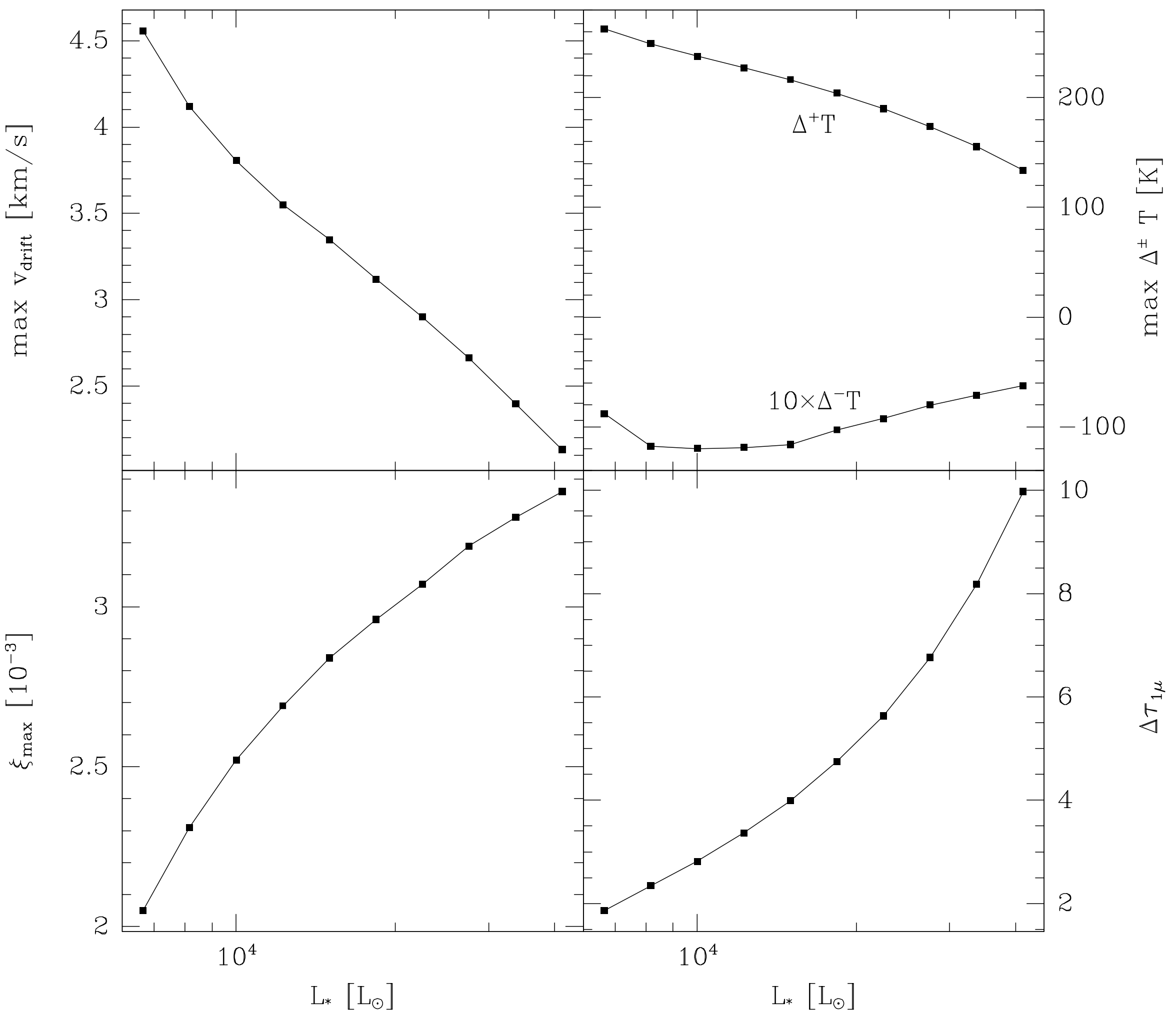

Abbildung 3.14: Abhängigkeit der Kenngrößen (II) von der stellaren Leuchkraft L_*

- Die Massenverlustrate $\dot{M}$
- Die Position r_c des Schallpunkts

(II) Abb. 3.14

- Die maximale Driftgeschwindigkeit v_{drift} des Staubes
- Die maximale positive Abweichung der Gastemperatur von der Strahlungsgleichgewichtstemperatur durch Reibungsaufheizung Δ^+T und die maximale negative Abweichung Δ^-T durch Expansionskühlung innerhalb des Schallpunkts
- Das maximale Verhältnis ξ_{max} zwischen Trägheits- und Beschleunigungskraft der Staubkomponente (vgl. Abschnitt 3.1.4)
- Die optische Dicke der Staubhülle $\Delta\tau_{1\mu}$ bei $\lambda = 1\mu$m

Eine zunehmende Leuchtkraft bei konstanter Effektivtemperatur korrespondiert mit einer Vergrößerung des Sternradius. Daher nimmt die Gravitationsbeschleunigung an der Sternoberfläche ab und bei konstanter Staubmenge $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ steigt der auf die Schwerkraft bezogenene Strahlungsdruck auf den Staub. Deshalb steigen auch der Impulsübertrag innerhalb und außerhalb des Schallpunktes und die damit verbundenen Größen $\dot{M}$ und $v_{g,\infty}$.

In einem weiten Bereich läßt sich die Abhängigkeit des Logarithmus der Massenverlustrate vom Logarithmus der Leuchtkraft durch eine Gerade mit der Steigung

$$\frac{d \log \dot{M}\,[M_\odot/yr]}{d \log L_*\,[L_\odot]} = 1.84 \tag{3.10}$$

beschreiben. Dies ist in guter Übereinstimmung mit der von de Jager et al. (1988) angegebenen Steigung 1.995, die durch einen empirischen Fit der beobachteten Massenverlustraten im HRD bestimmt wurde.

Die GG-Driftgeschwindigkeit des Staubes ist abhängig von $L_*/\dot{M}$ (vgl. [Dominik 1992]). Weil die Massenverlustrate schneller als linear mit ansteigender Leuchtkraft zunimmt (siehe Abb. 3.13), verringert sich auch die Driftgeschwindigkeit bei zunehmender Leuchtkraft. Somit nimmt auch der Einfluß der Reibungsheizung ($\Delta^+ T$) ab.

Bei vergleichbaren Expansionsgeschwindigkeiten bedeuten höhere Massenverlustraten größere Dichten. Deshalb ist die dichteabhängige Vibrationskühlung effektiver und $\Delta^- T$ verringert sich für höhere Leuchtkräfte. Das Verhältnis von Staub zu Gas $\dot{M}_d/\dot{M}_g$ ist zwar praktisch konstant, aufgrund der größeren Dichten des Gases nimmt jedoch die absolute Staubdichte zu und bewirkt eine Erhöhung der optischen Dicke $\Delta\tau_{1\mu}$ der Staubhülle.

Effektive Staubkondensation setzt bei einer Gastemperatur von ungefähr 1400 K ein. Die erhöhte optische Dicke der Staubhülle bei hohen Leuchtkräften vergrößert den *backwarming*-Effekt des Staubes und damit die Temperatur in den weiter innen liegenden Regionen. Die Staubbildung setzt deshalb erst später ein, und damit verschiebt sich auch der Schallpunkt zu größeren Radien.

Die vollständige Impulskopplung ist für alle untersuchten Leuchtkräfte sehr gut erfüllt.

Schlußfolgerungen und Ausblick

In dieser Arbeit sollten schwerpunktmäßig zwei Teilaspekte staubgetriebener Winde untersucht werden: der Einfluß von Heiz- und Kühlprozessen auf den Verlauf der Gastemperatur sowie die Impulskopplung zwischen Gas und Staub. Dazu wurde der Sternwind durch einen Zwei-Komponenten-Ansatz beschrieben und besonderes Augenmerk auf eine möglichst realistische Beschreibung der Austausch- und Transferterme zwischen Strahlungsfeld, Staub und Gas für Masse, Impuls und insbesondere für die Energie gerichtet.

Es zeigte sich, daß das beschreibende DGL-System aufgrund der Hinzunahme von Staubimpuls- und Gasenergiegleichung innerhalb des Schallpunkts in beide Integrationsrichtungen inhärent instabil ist. Durch ein geeignetes numerisches Lösungsverfahren konnten die Gleichungen gelöst werden und Modelle stationärer staubgetriebener Winde für verschiedene Werte der stellaren Leuchtkraft L_* und des freien Parameters a_d (des Staubkornradius) berechnet werden.

Die Modelle bestätigten die Ergebnisse von z. B. Goldreich und Scoville (1976), daß die Gastemperatur durch die Reibungsheizung driftender Staubkörner deutlich erhöht wird. Weiterhin zeigt sich, daß die dominanten Strahlungskühler reine Rotationsübergänge von HCN und CO sind. Die Annäherungszeitskala an den durch das Gleichgewicht von Heiz- und Kühlprozessen bestimmten GG-Wert für die Gastemperatur blieb bei allen Modellen um einen Faktor 5 kleiner als die Expansionszeitskala, mit der sich die GG-Temperatur ändert. Dies legt nahe, die Gastemperatur lokal durch eine Gleichgewichtsbedingung (vergleichbar der vollständigen Impulskopplung) zu berechnen.

Ein Vergleich der Temperaturschichtung, die sich aus der detaillierten Behandlung von Heiz- und Kühlprozessen ergibt, mit einer adiabatischen sowie einer RE- und einer LTE-Temperaturschichtung zeigte, daß der adiabatische Grenzfall die Struktur des Windes in keiner Weise wiedergeben kann. Die LTE-Näherung führt aufgrund der effektiven Kopplung an das Strahlungsfeld auf die gleichen Modelle wie die RE-Näherung. Der Vergleich mit dem Standardmodell, welches eine detaillierte Behandlung der Gasenergiegleichung einschließt, zeigt, daß diese Näherungen prinzipiell eine dem Standardmodell vergleichbare Windstruktur ergeben. Bei dem Standardmodell bewirkt die Erhöhung der Gastemperatur durch Reibungsheizung nach Einsetzen der Staubbildung jedoch eine Ausdehnung und damit effektiv eine Verbreiterung und Verschiebung der Staubbildungszone.

Aus der Diskussion charakteristischer Zeitskalen sowie anhand der berechneten Modelle ergab sich, daß die Annahme einer vollständigen Impulskopplung immer sehr gut ist. Dies bedeutet auch, daß die üblicherweise vorgenommene Berechnung der Gleichgewichts-Driftgeschwindigkeit einzelner Staubkörner sinnvoll ist. Dem widersprechende Ergebnisse von

Berruyer und Frisch (1983) sind auf eine Inkonsistenz in der Behandlung von Staubbildung und der anschließenden Beschleunigung zurückzuführen.

Die Berechnung von Modellen für verschiedene Werte der stellaren Leuchtkraft L_* und des freien Parameters a_d (des Staubkornradius) ergab, daß die qualitative Struktur des Windes, z. B. das Geschwindigkeitsprofil und die Reibungsaufheizung des Gases nach Einsetzen der Staubbildung, unverändert bleibt. Effekte, die auf die Drift des Staubes zurückzuführen sind, treten besonders bei Sternen mit niedrigen Massenverlustraten, also geringeren Leuchtkräften, auf, da hier die Driftgeschwindigkeit der Teilchen groß ist. Zu diesen Effekten zählen die Reibungsaufheizung des Gases und ein verringerter Impulsübertrag auf das Gas durch die dynamisch verdünnte Staubkomponente.

Mehrere Erweiterungsmöglichkeiten der vorgenommenen Modellierung bieten sich an

- Von besonderer Wichtigkeit ist eine Aufgabe der Näherung einer einheitlichen Staubkorngröße a_d und des vernachlässigten Staubwachstums. Dazu kann man zum einen das von Gail und Sedlmayr (1988) abgeleitete Staubmomentensystem in Bezug auf die dort angenommene Positionskopplung von Gas und Staub modifizieren, oder zum anderen eine explizite Mehrkomponenten-Formulierung vornehmen, in der die Staubverteilungsfunktion diskretisiert wird und eine Vielzahl von Staubkorngrößen jeweils als eigenständige Komponenten behandelt werden.

- Bei der Beschreibung der Energieaustauschraten von Molekülen mit dem Strahlungsfeld konnte für die Vibrationsübergänge aufgrund der schlechten Datenlage bezüglich der Stoßkoeffizienten nur CO betrachtet werden. Für die Berücksichtigung mehratomiger Moleküle muß zudem das verwendete Zwei-Niveau-Modell erweitert werden.

- Das Strahlungstransportsproblem wurde in der vorliegenden Arbeit nur in approximativer Form gelöst. Dies bezieht sich nicht nur auf die frequenzintegrierte mittlere Intensität J, die im wesentlichen durch den Staub beeinflußt wird, sondern vor allem auf den Strahlungstransport in den Moleküllinien. Dieser ist für die tatsächliche Besetzung der molekularen Energieniveaus, eventuelle Maser-Tätigkeit und die Effizienz der Linienkühlung entscheidend.

  In diesem Zusammenhang sind auch hydrostatische Atmosphärenrechnungen zu erwähnen [Elitzur *et al.* 1989, Jørgensen und Johnson 1992], die zeigen, daß der Strahlungsdruck auf Molekül-Vibrationslinien durchaus relevante Größenordnungen annehmen kann und insbesondere bei M-Sternen, für die es bisher nicht möglich war, rein staubgetriebene Modelle zu konstruieren, ein denkbarer Startmechanismus für den Sternwind ist. Eine Untersuchung dieser Frage kann in Verbindung mit einem non-LTE Linientransport für die Vibrationslinien der wichtigsten Absorbermoleküle vorgenommen werden.

In den explorativen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wurden wichtige Basisinformationen für die Realisierung der genannten Erweiterungsmöglichkeiten der Windmodellierung gewonnen.

Anhang A

Die Anregungstemperatur der Rotationszustände

Der Energieaustausch infolge reiner Rotationsübergänge bei Stößen mit anderen Gasatomen ergibt sich aus der Summe von Stoßabregung und -anregung. Unter der Annahme, daß die Wirkungsquerschnitte nicht vom Stoßpartner abhängen, sondern im wesentlichen durch die geometrische Ausdehnung des betrachteten Moleküls i gegeben sind, gilt

$$q_{coll}^{rot} = \sum_l \sum_{u>l} n_g (n_l C_{lu} - n_u C_{ul}) \Delta E_{lu} \tag{A.1}$$

$$= \sum_l \sum_{u>l} n_g n_l C_{ul} \left(\frac{C_{lu}}{C_{ul}} - \frac{n_u}{n_l} \right) \Delta E_{lu} \tag{A.2}$$

wobei n_g die Gesamtdichte der Stoßpartner ist und ΔE_{lu} der Energiegewinn beim Übergang vom Niveau l zum Niveau u, also $E_u - E_l$.

Das Verhältnis der auf die Dichte der Stoßpartner bezogenen Übergangsraten C ergibt sich aus der Forderung detaillierten Gleichgewichts im LTE. Das Verhältnis der Besetzungsdichten der Rotationsniveaus ist bei komponentenweisem LTE durch die Boltzmann-Verteilung gemäß einer Anregungstemperatur T_{rot} gegeben (siehe Gl. (1.54)). Man erhält dann

$$q_{coll}^{rot} = \sum_l \sum_{u>l} n_g n_l C_{ul} \frac{g_u}{g_l} \left[\exp\left(-\frac{\Delta E_{lu}}{kT_g} \right) - \exp\left(-\frac{\Delta E_{lu}}{kT_{rot}} \right) \right] \Delta E_{lu} \tag{A.3}$$

Der Entartungsgrad beträgt für Rotationsniveaus $g_J = 2J + 1$ in Abhängigkeit von der Rotationsquantenzahl J.

Für die Übergangsraten C_{ul} wird der folgende Ansatz von Hollenbach und McKee (1979) übernommen

$$C_{ul} \equiv \sigma_{ul} v_{th} = \sigma_0 \frac{n_i g_l \exp(-E_l/kT_g)}{Z} v_{th} \tag{A.4}$$

wobei σ_0 für CO von der Größenordnung 10^{-15} cm^2 ist, Z die Zustandsumme bezeichnet und n_i die Teilchendichte des Moleküls. Durch die Wahl dieser Form für die Wirkungsquerschnitte σ_{ul} wird sowohl die Forderung des detaillierten Gleichgewichts im LTE erfüllt als auch

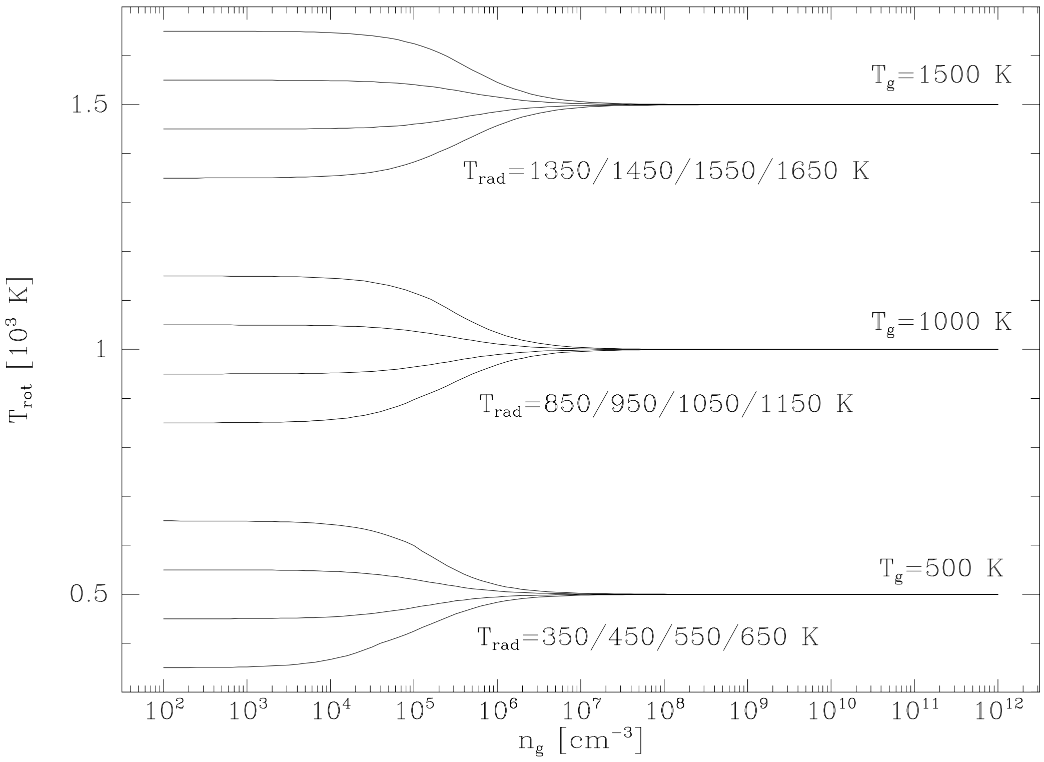

Abbildung A.1: Rotationsanregungstemperatur von CO in Abhängigkeit von der Gasdichte für verschiedene Paare der Gas- und Strahlungsgleichgewichtstemperatur

das Ergebnis quantenmechanischer Berechnungen, daß der über alle Übergänge summierte *Gesamt*wirkungsquerschnitt näherungsweise konstant und von der Größe σ_0 ist.

Betrachtet man das Molekül als starren Rotator, ist die Energie eines Rotationszustands J durch

$$E_J = (J+1)JE_0 \approx J^2 E_0 \tag{A.5}$$

gegeben, wobei $E_0 = k\,2.765$ K für CO. In diesem Fall ergibt sich für die Zustandssumme

$$Z = \frac{kT_{rot}}{E_0} \tag{A.6}$$

und man erhält schließlich

$$q_{coll}^{rot} = \frac{n_g n^i \sigma_0 v_{th}}{Z^2} \sum_l g_l \exp\left(-\frac{E_l}{kT_{rot}} - \frac{E_l}{kT_g}\right) \sum_{u>l} g_u \left[\exp\left(-\frac{\Delta E_{lu}}{kT_g}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta E_{lu}}{kT_{rot}}\right)\right] \Delta E_{lu} \tag{A.7}$$

Durch numerische Lösung der impliziten Gleichung (1.63) läßt sich die Anregungstemperatur T_{rot} der Rotationszustände in Abhängigkeit von der Gasdichte für verschiedene Paare von T_g und T_{rad} bestimmen. Die Ergebnisse sind in Abb. A.1 graphisch dargestellt. Man erkennt, daß T_{rot} für Gasdichten größer als $\sim 10^7$ cm^{-3} durch die Gastemperatur bestimmt ist. Die Besetzung der Niveaus wird also durch Stöße dominiert und die LTE-Annahme ist gerechtfertigt.

Absorbierte Photonen werden zum überwiegenden Fall durch Stoßabregung thermalisiert. Für Gasdichten kleiner als $\sim 10^3$ cm^{-3} ist T_{rot} durch die Strahlungsgleichgewichtstemperatur gegeben. In diesem Fall dominieren die radiativen Übergänge und es herrscht eine non-LTE Situation. Absorbierte Photonen werden überwiegen reemittiert (gestreut) bevor sie durch eine Kollision thermalisiert werden können. Diese Ergebnisse sind unabhängig von der gewählten Gastemperatur und der relativen Differenz zur Strahlungsgleichgewichtstemperatur.

Der Übergang ins non-LTE vollzieht sich für CO also bei geringen Dichten, und zwar unter den typischen Bedingungen zirkumstellarer Hüllen außerhalb von $r = 30\,R_*$. Im Falle von HCN liegt die Grenze für eine begründete LTE-Annahme weiter innen bei Dichten von ca. 10^8 cm^{-3}, weil die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld effektiver ist. Im Rahmen der durchgeführten Modellrechnungen ist aber die Konzentration von HCN bei Annahme chemischen Gleichgewichts dann bereits soweit gesunken, daß CO den Großteil der Rotationskühlung leistet.

Literaturverzeichnis

[Allen 1973] Allen, C. W., 1973. *Astrophysical quantities.* The Athlone Press, London.

[Ayres und Wiedemann 1989] Ayres, T. R. und Wiedemann, G. R., 1989. Non-LTE CO, revisited. *Astrophys. J.*, **338**, 1033–1046.

[Baines *et al.* 1965] Baines, M. J., Williams, I. P., und Asebiomo, A. S., 1965. Resistance to the motion of a small sphere moving through a gas. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **130**, 63–74.

[Berruyer und Frisch 1983] Berruyer, N. und Frisch, H., 1983. Dust-driven winds: I. A two-fluid model and its numerical solution. *Astron. Astrophys.*, **126**, 269–277.

[deJager *et al.* 1988] deJager, C., Nieuwenhuijzen, H., und van der Hucht, K. A., 1988. Mass loss rates in the Hertzsprung-Russel Diagram. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **72**, 259–289.

[Dominik 1992] Dominik, C., 1992. *Formation of dust grains in the winds of cool giants.* Doktorarbeit, Technische Universität Berlin.

[Dominik *et al.* 1989] Dominik, C., Gail, H.-P., und Sedlmayr, E., 1989. The size distribution of dust particles in a dust-driven wind. *Astron. Astrophys.*, **223**, 227–236.

[Draine 1980] Draine, B. T., 1980. Interstellar shock waves with magnetic precursors. *Astrophys. J.*, **241**, 1021–1038.

[Draine 1986] Draine, B. T., 1986. Multicomponent, reacting MHD flows. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **220**, 133–148.

[Elitzur *et al.* 1989] Elitzur, M., Brown, J. A., und Johnson, H. R., 1989. On the onset of mass loss in late-type stars. *Astrophys. J. Letters*, , L95–L98.

[Gail *et al.* 1984] Gail, H.-P., Keller, R., und Sedlmayr, E., 1984. Dust formation in stellar winds: I. A rapid computational method and application to graphite condensation. *Astron. Astrophys.*, **133**, 320–332.

[Gail und Sedlmayr 1985] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1985. Dust formation in stellar winds: II. Carbon condensation in stationary, spherically expanding winds. *Astron. Astrophys.*, **148**, 183–190.

[Gail und Sedlmayr 1987a] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1987. Dust formation in stellar winds: III. Self-consistent models for dust driven winds around C-stars. *Astron. Astrophys.*, **171**, 197–204.

[Gail und Sedlmayr 1987b] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1987. Dust formation in stellar winds: V. The minimum mass loss rate for dust-driven winds. *Astron. Astrophys.*, **177**, 186–192.

[Gail und Sedlmayr 1988] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1988. Dust formation in stellar winds: IV. Heteromolecular carbon grain formation and growth. *Astron. Astrophys.*, **206**, 153–168.

[Gauger *et al.* 1990] Gauger, A., Gail, H.-P., und Sedlmayr, E., 1990. Dust formation, growth and evaporation in a cool pulsating circumstellar shell. *Astron. Astrophys.*, **235**, 345–361.

[Gehrz 1989] Gehrz, R. D., 1989. . In Allamandola, L. J. und Tielens, A. G. G. M., Editoren, *Interstellar dust*, Seite 445, D. Reidel, Dordrecht.

[Gehrz und Woolf 1971] Gehrz, R. D. und Woolf, N. J., 1971. Mass loss from M Stars. *Astrophys. J.*, **165**, 285–294.

[Gilman 1972] Gilman, R. C., 1972. On the coupling of grains to the gas in circumstellar envelopes. *Astrophys. J.*, **178**, 423–426.

[Glass und Kironde 1982] Glass, G. P. und Kironde, S., 1982. . *J. Phys. Chem.*, **86**, 908.

[Goldreich und Scoville 1976] Goldreich, P. und Scoville, N., 1976. OH IR stars: I. Physical properties of circumstellar envelopes. *Astrophys. J.*, **205**, 144–154.

[Hellwege 1982] Hellwege, K.-H., Editor, 1982. *Landolt-Börnstein, Numerical data and functional relationships in science and technology*, Band II/14 der Reihe *new series*. Springer-Verlag, Berlin.

[Hollenbach und McKee 1979] Hollenbach, D. und McKee, C. F., 1979. Molecule formation in fast shocks. *Astrophys. J. Suppl.*, **41**, 555–592.

[Holzer und MacGregor 1986] Holzer, E. T. und MacGregor, K. B., 1986. . In Morris, M. und Zuckermann, B., Editoren, *Mass loss from Red Giants*, Reidel, Dordrecht.

[Jørgensen und Johnson 1992] Jørgensen, U. G. und Johnson, H. R., 1992. Radiative force on molecules and its possible role for mass loss in evolved AGB stars. *Astron. Astrophys.*, **265**, 168–176.

[Kippenhahn und Weigert 1990] Kippenhahn, R. und Weigert, A., 1990. *Stellar structure and evolution*. Springer-Verlag.

[Knapp 1987] Knapp, G. R., 1987. Mass loss from carbon stars – Observations of the CO millimeter wavelength rotational lines. In Kwok, S. und Pottasch, S. R., Editoren, *Late stages of stellar evolution*, Reidel, Dordrecht.

[Koike *et al.* 1980] Koike, C., Hasegawa, H., und Manabe, A., 1980. Extinction coefficients of amorphous carbon grains from 2100 Å to 340 μm. *Astrophys. Space Sci.*, **67**, 495–502.

[Kwan und Hill 1977] Kwan, J. und Hill, F., 1977. The circumstellar envelope of IRC + 10216. *Astrophys. J.*, **215**, 781–787.

[Lafon und Berruyer 1991] Lafon, J.-P. J. und Berruyer, N., 1991. Mass loss mechanisms in evolved stars. *Astron. Astrophys. Rev.*, **2**, 249–289.

[Linsky 1969] Linsky, J. L., 1969. On the pressure-induced opacity of molecular hydrogen in late-type stars. *Astrophys. J.*, **156**, 989–1005.

[Lucy 1971] Lucy, L. B., 1971. The formation of resonance lines in extended atmospheres. *Astrophys. J.*, **163**, 95–110.

[Lucy 1976] Lucy, L. B., 1976. Mass loss by cool carbon stars. *Astrophys. J.*, **205**, 482–491.

[MacGregor und Stencel 1992] MacGregor, K. B. und Stencel, R. E., 1992. On the interaction between dust and gas in late-type stellar atmospheres and winds. *Astrophys. J.*, **397**, 644–651.

[Maciel 1977] Maciel, W. J., 1977. Mass loss from Mira variables: II. The supersonic flow. *Astron. Astrophys.*, **57**, 273–277.

[Maron 1990] Maron, N., 1990. Optical properties of fine amorphous carbon grains in the infrared region. *Astrophys. Space Sci.*, **172**, 21–28.

[Mihalas und Mihalas 1984] Mihalas, D. und Mihalas, B., 1984. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford University Press.

[Millikan und White 1964] Millikan, R. C. und White, D. R., 1964. Systematics of vibrational relaxation. *J. Chem. Phys.*, **39**(4), 3209–3213.

[Parker 1960] Parker, E. N., 1960. The hydrodynamic treatment of the expanding solar corona. *Astrophys. J.*, **132**, 175–183.

[Press *et al.* 1986] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., und Vetterling, W. T., 1986. *Numerical recipes*. Cambridge University Press.

[Scholz und Tsuji 1984] Scholz, M. und Tsuji, T., 1984. The effects of spherical extension upon the photospheric structure and spectrum of red giants: comparison of M and C stars. *Astron. Astrophys.*, **130**, 11–18.

[Sutton *et al.* 1979] Sutton, E. C., Betz, A. L., Storey, J. W. V., und Spears, D. L., 1979. The brightness distribution of IRC + 10216 at 11 microns. *Astrophys. J. Letters*, **230**, L105–L108.

[Tsuji 1966] Tsuji, T., 1966. The atmospheric stucture of late-type stars: I. Physical properties of cool gaseous mixtures and the effect of molecular line absorption on stellar opacities. *Pupl. astr. Soc. Japan*, **18**, 127–173.

[Winters *et al.* 1993] Winters, J. M., Dominik, C., und Sedlmayr, E., 1993. Theoretical spectra of circumstellar dust shells around carbon-rich Asymptotic Giant Branch stars. *Astron. Astrophys.*, **submitted**.

Dank ...

an Professor Sedlmayr und alle anderen Mitglieder des Instituts für Astronomie und Astrophysik für die freundliche Aufnahme und die Möglichkeit, auf einem interessanten Forschungsgebiet der Astrophysik mitzuarbeiten.

Besonders hilfreich waren die fachlichen Diskussionen mit den Kollegen, von denen ich hier Andreas Gauger, Carsten Dominik und Jan-Martin Winters nennen möchte, die mir freundlicherweise auch Unterprogramme zur Nutzung überließen.

Dank auch an Peter Woitke und nochmals an Andreas Gauger, die die Rohfassung der Diplomarbeit durchsahen und mit ihren Anregungen dazu beitrugen, daß die Darstellung klarer wurde.