Studienarbeit

Entwicklung von Sternen am asymptotischen Riesenast

Thorsten Arndt
Matr.-Nr. 92903

Institut für Astronomie und Astrophysik
Technische Universität Berlin

Fertiggestellt im Sommersemester 1994

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In dieser Arbeit sollen die Möglichkeiten zur Beschreibung der Entwicklung von Sternen dargestellt werden. Bestimmendes Merkmal für seine zukünftige Entwicklung, ist die Masse eines Sterns. Daher werden im 1. Kapitel allgemein, die massenabhängigen Entwicklungswege beschrieben. In diesem Teil werden auch die grundlegenden Bezeichnungen und die Abfolge der einzelnen Entwicklungsstufen erläutert. Durch Beobachtungen zugängliche Informationen lassen sich mit den Einblicken, die entsprechende Modelle liefern, kombinieren um so ein Gesamtbild zu erhalten.

Grundlegendes Problem ist dabei, daß aus der Beobachtung praktisch ausschließlich nur die obersten Sternschichten zugänglich sind, und für Sterne in größerer Entfernung außerdem nur noch Mittelwerte über die ganze Sternoberfläche beobachtet werden, da die Winkelauflösung zu gering ist. Ein wesentliches Merkmal von Modellen zum inneren Aufbau eines Sterns muß die Anpassung an die beobachteten Realitäten sein, das heißt die Modelle müssen an ihrem Außenrand ein Erscheinungsbild zeigen wie es auch beobachtet wird.

Im wesentlichen beruht das Bild, das man sich über die Sternentwicklung macht, auf den Ergebnissen von Modellen der physikalischen Vorgänge in ihrem Inneren. Die Grundlagen dieser Modelle werden im 2. Kapitel kurz behandelt. Noch sind einige Prozesse in diesen Modellen von einer geeigneten Parametrisierung abhängig, so daß eine Reduzierung solcher, teilweise nahezu völlig frei wählbarer, Parameter als ein wünschenswertes Ziel erscheint. Natürlich bringt die Verwendung solcher Parameter an manchen Stellen der Modelle auch wachsende Unsicherheiten mit sich, die sich oftmals nur argumentativ beheben lassen, teilweise fehlt auch einfach noch ein besseres Verständnis der beteiligten Vorgänge.

Das 3. Kapitel ist eine zusammenfassende Darstellung der Mischungswegtheorie der Konvektion. Dabei wird einer der oben angeführten, nahezu frei wählbaren Parameter auftauchen. Die Beschreibung der Konvektion ist nicht ohne Einfluß auf die Sternentwicklung.

Im 4. Kapitel werden Massenverluste behandelt. Da die Sternmasse ein wesentliches Kriterium der Sternentwicklung ist, sind alle Prozesse die zu einem merklichen Massenverlust führen sehr wichtig. Auf dem asymptotischen Riesenast im Hertzsprung-Russell-Diagramm zeigen sich relativ hohe Massenverlustraten durch Winde die gravierende Konsequenzen bezüglich der weiteren Entwicklung des Sterns haben.
Bislang unterlag die Beschreibung dieser Winde einem *freien* Parameter η, da sie durch eine Fit-Formel nach [Reimers 1975] ausgeführt wurde (L, R und M in solaren Einheiten):

$$\dot{M} = -\eta \, 4 \times 10^{-13} \, \frac{L \, R}{M} \qquad [M_\odot / a] \tag{1}$$

Ist der Stern kühl genug, so können die Bedingungen in seiner äußeren Hülle so beschaffen sein, daß es dort zur Kondensation von Staubkörnern kommen kann. Durch eine Impulskopplung des Staubes mit dem umgebenden Gas kann der Strahlungsdruck des Sterns auf den Staub einen stationären Wind mit sehr hohen Massenverlustraten antreiben.
Die Kombination eines selbstkonsistenten Modells eines solchen staubgetriebenen Windes mit einer Sternentwicklungsrechung in der entsprechenden Phase, könnte das Problem der Sternentwicklung von diesem *freien* Parameter η befreien.

In den Grundzügen beruht diese Arbeit auf dem Vorlesungsskript *Innerer Aufbau und Entwicklung von Sternen* [Ritter 1988] sowie dem Lehrbuch *Physik der Sterne und der Sonne* [Scheffler und Elsässer 1990]. Das Kapitel über Konvektion orientiert sich am Buch *Principles of stellar structure* [Cox und Giuli 1968].

1 Allgemeine Entwicklungswege

1.1 Ausgangspunkt: Hauptreihe

Gemeinsamer Ausgangspunkt der Sternentwicklung ist die Alter-Null-Hauptreihe (Zero-Age-Main-Sequence = ZAMS) im Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD).
In dieser Phase ihrer Entwicklung erzeugen die Sterne ihre Energie durch Fusionsreaktionen aus Wasserstoff (*Wasserstoff-Brennen*) in ihrem Zentrum. Die Lage auf der Hauptreihe selbst ist durch die Masse des Sterns bestimmt.

Der prinzipielle Entwicklungsweg für die hier wichtigen kleinen und mittleren Sternmassen (das sind $M \lesssim 8 M_{\odot}$) ist in Bild 1 angedeutet. Ausgehend von der Hauptreihe (MS = Main Sequence) entwickeln sich diese Sterne über den Unter-Riesenast (SGB = Small Giant Branch) entlang der Hayashi-Linie (HL) bis hin zum Helium-Flash auf dem Riesenast (RGB = Red Giant Branch) um danach in einer Phase ruhigen He-Brennens auf dem Horizontal Ast (HB = Horizontal Branch) zu landen. Von dort aus führt dann die weitere Entwicklung über den asymptotischen Riesenast (AGB = Asymptotic Giant Branch) zu höheren Leuchtkräften.

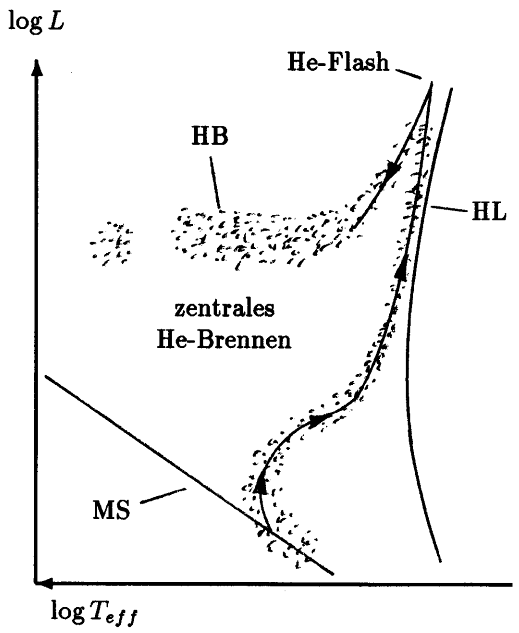


Bild 1: schematisches HRD, nach [Ritter 1988].

Die Hayashi-Linie stellt im HRD die Grenze eines vollkonvektiven Sterns dar. Auf der rechten Seite dieser Linie können sich keine Sterne befinden, die im hydrostatischen Gleichgewicht sind. Sie stellt also in diesem Sinne eine Grenze der Stabilität eines Sternes dar. Die Entwicklung zum He-Flash verläuft teilweise sehr nahe an der Hayashi-Linie. Dies ist ein Anzeichen dafür, daß die Sterne in dieser Region des HRD sehr tiefe Konvektionszonen besitzen müssen.

Diese scheinbar grobe Sichtweise der Entwicklungswege wird durch die HRD oder Farben-Helligkeits-Diagramme von Kugelsternhaufen bestätigt. Dort findet man die zuvor erwähnten Entwicklungsstufen wieder (Bild 2).

Abhängig von der Anfangsmasse auf der Hauptreihe sind die, im wesentlichen gleich alten Sterne des Haufens mehr oder weniger weit auf ihren Entwicklungswegen fortgeschritten und haben sich so von der Hauptreihe (MS) entfernt.

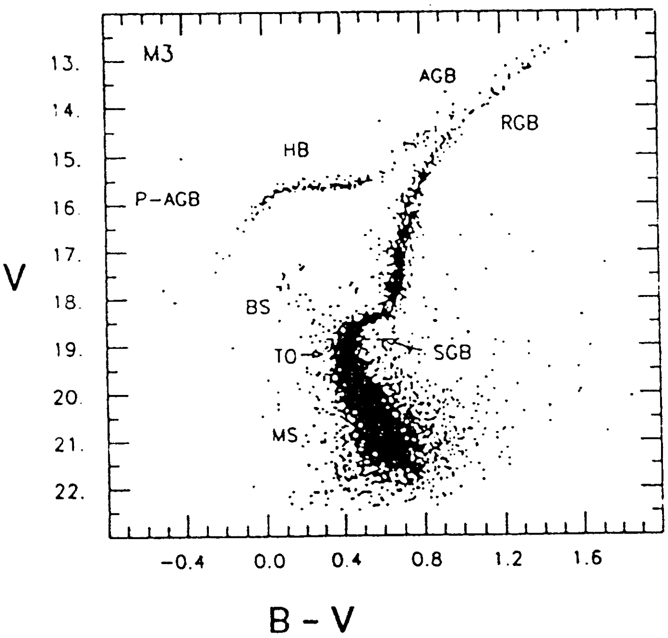


Bild 2: Farben-Helligkeits-Diagramm des Kugelsternhaufens M3. BS = Blue Stranglers, TO = Turn-Off – Abknickpunkt der Hauptreihe, P-AGB = Post-AGB Sterne. Weitere Abkürzungen wie in Bild 1 [Renzini und Fusi-Pecci 1988, Fig. 1].

Beginnt man auf der ZAMS, läßt sich die Abfolge der einzelnen Stadien der Sternentwicklung schematisch darstellen (Bild 3, S.3).

Auf der ZAMS wird für jeden Stern eine homogene chemische Zusammensetzung angenommen, er befindet sich in der Phase des zentralen Wasserstoff-Brennens. Die weitere Entwicklung ist sehr stark von der Masse des betrachteten Sterns auf der ZAMS abhängig.

Man kann hier zwei wesentliche Gruppen erkennen:
Sterne kleiner (zwischen 1 und 2.1..2.3 $M_\odot$) und mittlerer (zwischen 2.1..2.3 und 8 $M_\odot$) Masse beschreiten einen wesentlich anderen Entwicklungsweg, als die Sterne mit großer Masse (über $8M_\odot$). Sterne unter einer Sonnenmasse werden in dieser Betrachtung ausgeschlossen. Solche der metallreichen Population I beenden ihre Entwicklung bereits auf dem RGB, die der metallarmen Population II erreichen noch den HB. Für diese sehr kleinen Massen verläuft die Entwicklung außerdem so langsam, daß sich die meisten Sterne noch nicht weit von der ZAMS entfernt haben. Mit zunehmender Masse läuft auch die Entwicklung rascher ab. Die Begründung dafür wird im nächsten Abschnitt geliefert.

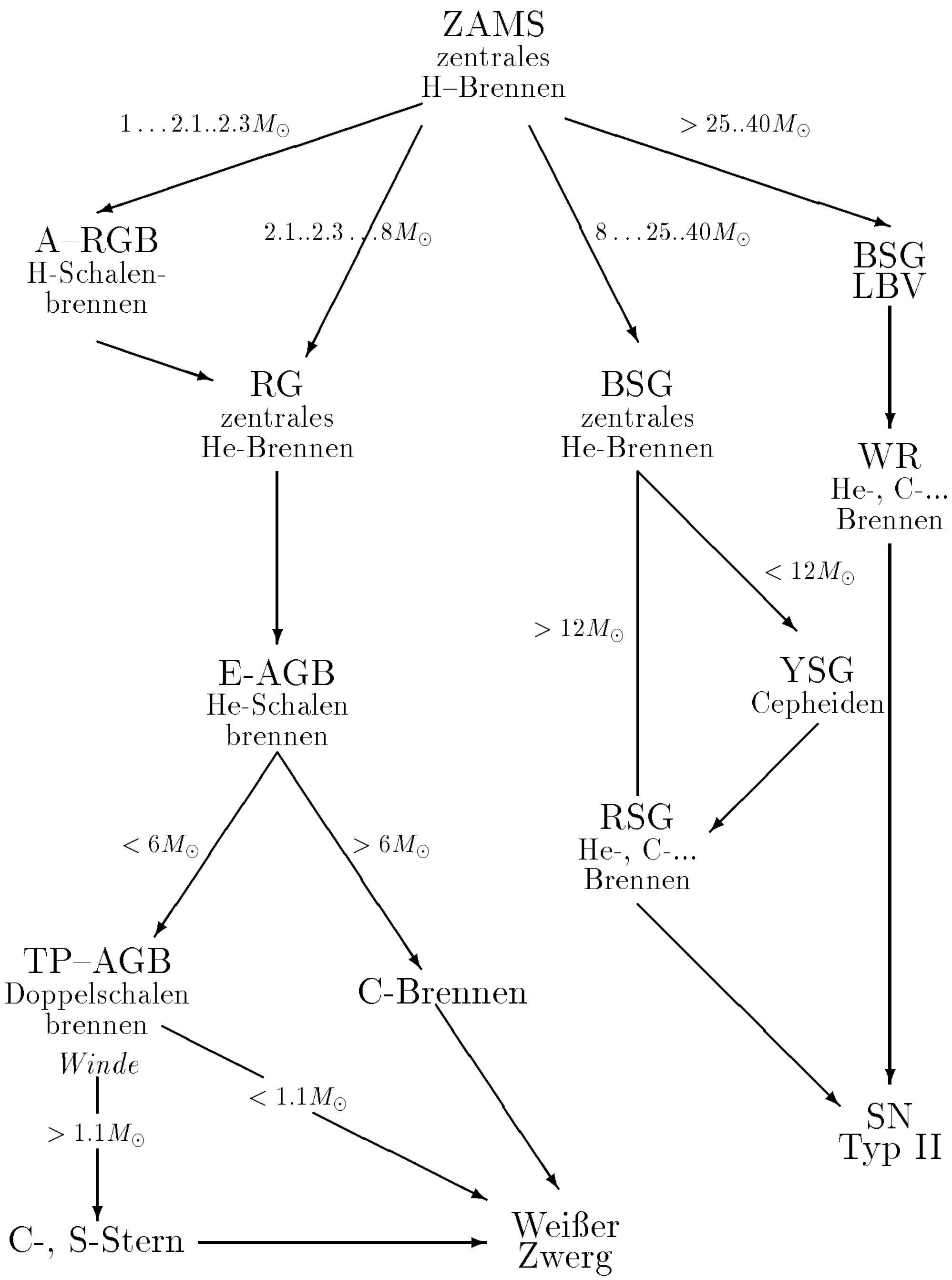


Bild 3: Prinzipieller Verlauf der massenabhängigen Entwicklungswege.
Die angegebenen Massen beziehen sich auf die Anfangsmasse auf der Alter Null Hauptreihe (ZAMS), nach [Weinzierl 1991].

AGB	Asymptotic Giant Branch	BSG	Blue Super Giant
A-RGB	Asymptotic - Red Giant Branch	LBV	Luminous Blue Variable
E-AGB	Early AGB	RSG	Red Super Giant
RG	Red Giants	WR	Wolf-Rayet Stern
TP-AGB	Thermal Pulses AGB	YSG	Yellow Super Giant
ZAMS	Zero Age Main Sequence		

Die Abgrenzung der Massenbereiche selbst ist bereits nicht eindeutig.
[Sackmann und Boothroyd 1991] begründen die Wahl der Grenzmassen und zeigen auch die Schwierigkeiten bei deren Wahl kurz auf. Die unterste Grenze für geringe Masse ist die minimale Kernmasse, bei der im Zentrum des Sterns das He-Brennen zünden kann. Sie liegt bei $\approx 0.4...0.5 M_\odot$. Berücksichtigt man hier die typischen Massenverluste der vorherigen RGB-Phase von $\approx 0.2 M_\odot$, so gelangt man zu einer minimalen anfänglichen Sternmasse von $M_i \sim 0.7 M_\odot$. Die Obergrenze geringer Sternmasse ist die Masse M_{He-Fl}. Für diese Masse findet die He-Zündung im Kern noch unter entarteten Bedingungen statt. Das führt zu einem He-Flash im Kern.
Oberhalb von M_{He-Fl} bis hin zu M_{up} liegt der Bereich mittlerer Masse. M_{up} ist die anfängliche Sternmasse bis zu der im Lauf der Entwicklung ein entarteter C-O–Kern gebildet wird. Außerdem hängen die Grenzmassen davon ab, zu welcher Population der Stern gehört. Für die metallarme Population II gelten jeweils geringere Grenzen.

in $[M_\odot]$	Pop. I	Pop. II	Masse	mit Überschießen
M_{up}	≈ 9	≈ 7	~ 6	Stern erreicht noch den AGB
M_{He-Fl}	≈ 2.3	≈ 1.8	~ 1.6	Grenze geringe/mittlere Masse

Unter Einschluß von Effekten des konvektiven Überschießens verringern sich die Grenzmassen deutlich. Dabei bleibt festzuhalten, daß die Theorie der Konvektion einige Unsicherheiten beinhaltet (siehe dazu auch Kapitel 3. *Konvektion und Mischungswegtheorie*). Die beschriebenen Entwicklungswege sollten weiterhin gültig bleiben, auch wenn die Grenzmassen sich noch verschieben können. In dieser Arbeit werden daher konsequent die Grenzmassen ohne Überschießen verwendet.

1.1.1 Sterne großer Masse

Sterne großer Masse verlassen die Hauptreihe früher als massearme Sterne. Das Verhältnis des Energievorrates zur abgestrahlten Energie pro Zeit ist proportional zur Verweildauer des Sterns auf der Hauptreihe. Die Leuchtkraft eines Sterns ist die abgestrahlte Energie pro Zeit. Der Energievorrat ist proportional zu seiner Masse. Nutzt man weiterhin die Masse-Leuchtkraft-Relation $L \sim M^3$ aus, kommt man zu einer Beziehung zwischen der Lebensdauer τ_{MS} auf der Hauptreihe und der anfänglichen Sternmasse M: $\tau_{\mathrm{MS}} \sim M/L \sim M^{-2}$.
Im Zentrum eines Sterns mit großer Masse ist der Wasserstoff-Vorrat also schneller erschöpft als für masseärmere Sterne. Der Stern verläßt in der Folge die Hauptreihe, entwickelt sich weiter zum zentralen Helium-Brennen und erscheint als blauer Über-Riese (BSG). Auch hier kann man dann zwei Massenbereiche unterscheiden.

- Massenbereich $M = 8 \ldots (25..40)\, M_\odot$
  Liegt die Masse noch unter $12\, M_\odot$ führt die Entwicklung über ein Stadium als gelber Überriese (YSG) oder Cepheiden-Typ. Letztere sind variable Sterne mit Perioden von $P = 1..50$ d und Helligkeitsvariationen $\Delta m = 0.1...2^m$ die sehr regelmäßig ablaufen (Spektraltyp A..K, Klassen I...II). Die nächste Stufe bilden dann rote Überriesen (RSG) in denen bereits die Prozesse des zentralen Kohlenstoff-Brennens ablaufen und auch das He-Schalenbrennen in darüberliegenden Schalen noch nicht zum Stillstand gekommen ist.

- $M > (25...40)\, M_\odot$
  Sterne sehr großer Masse sind bereits im BSG-Stadium veränderlich und treten als leuchtkräftige blaue Veränderliche (Luminous Blue Variable = LBV) auf. Dies sind die absolut hellsten aller Veränderlichen ($10^6 L_\odot$, Typen B..F mit Emissionslinien). Innerhalb von Jahren variieren sie unregelmäßig mit einer Amplitude von weit über einer Größenklasse. Aufgrund ihrer großen Helligkeit können sie sogar in anderen Galaxien erfaßt werden.

Solche Sterne sind aber vergleichsweise selten, da ihre Entwicklung sehr schnell abläuft und sie auch bei weitem nicht so häufig sind wie masseärmere Sterne. Sterne mit Massen von über $\approx 3 M_\odot$ machen nur einen Anteil von wenigen Promille aus [Scheffler und Elsässer 1990].

Für Sterne großer Masse wird die weitere Entwicklung durch einen Kreislauf der im Inneren abfolgenden Brennprozesse gesteuert.

$$\begin{array}{ccc} \text{Brennprozeß} & \longrightarrow & \text{Brennstoff erschöpft} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{Heizung des Kerns} & \longleftarrow & \text{Kernkontraktion} \end{array}$$

Ist ein Brennstoff verbraucht, führt die Entwicklung über den Kreislauf dahin, daß der nächsthöhere Brennprozess gestartet werden kann. Die Zeit, in der die Brennprozesse aufeinander folgen, wird dabei immer kürzer. Spätestens mit der Umwandlung von Silizium in Eisen endet der Kreislauf endgültig, da noch höhere Reaktionen zu keinem Energiegewinn mehr führen.

Im allgemeinen ist der Verlauf der Entwicklung abhängig von vier Punkten:

- zünden die Brennprozesse im Kern unter entarteten Bedingungen?
- findet eine konvektive Mischung statt und wenn ja, dann wie tief?
- ist die nukleare Energieerzeugung stabil, wenn sie nicht im Zentrum, sondern in beschränkten Massenschalen darüber (Schalenbrennen) stattfindet?
- liegt ein Massenverlust zum Beispiel über einen Sternwind vor?

Je nach dem, wie diese Fragen beantwortet werden, schlägt die weitere Entwicklung des Sterns verschiedene Wege ein.
Ein Beispiel für solche Unterscheidungen sind die Bedingungen unter denen im Zentrum des Sterns das He- oder C-Brennen gezündet wird. Ein Unterscheidungsmerkmal ist hier die Anfangsmasse M_i auf der Hauptreihe, beziehungsweise die Masse des Sternkerns M_{core} zum Zeitpunkt der Zündung.

$M_i > 2.3 M_\odot$	zentrales He-Brennen zündet nichtentartet
$M_i > 10 M_\odot$	zentrales C-Brennen zündet nichtentartet
$M_{core} \approx 0.45 M_\odot$	He-Flash im Kern (entartet)
$M_{core} \approx 1.4 M_\odot$	C-Flash im Kern (entartet)

Sterne mit 8..10 $M_\odot$ bilden erst nach dem C-Verbrauch im Zentrum einen entarteten Kern. Wie auch die masseärmeren Sterne, gehen sie durch eine Phase thermischer Pulse (TP-AGB, siehe Kapitel 1.4 die aber noch nicht vollständig untersucht sind. Am Anfang dieser Phase besitzen solche Sterne großer Masse einen O-Ne–Kern mit $M_{core} = 1.1 \ldots 1.4 M_\odot$. Der Kern liegt damit bereits sehr dicht an der Chandrasekhar'schen Grenzmasse für einen noch stabilen weißen Zwerg.

Sterne mit über 10 $M_\odot$ bilden am Ende einen entarteten Kern aus Fe-peak Elementen (Ordnungszahl in der Umgebung von Eisen) der nach einem Kollaps zwangsläufig zu einer Supernova führt. Der ehemalige Kern des Sterns endet dabei als Neutronen-Stern oder als ein schwarzes Loch. Für solche Sterne findet man auch enorme Massenverluste. Sie tragen die äußere Hülle ab, so daß der verbrannte Kern sichtbar wird (Wolf-Rayet-Sterne). In diesen Sternen laufen wiederum He- beziehungsweise C-Brennprozesse ab. Im Spektrum ähnelt deren Kontinuum den Spektraltypen O. . .B, zeigt aber Emissionslinien.
Da diese Kerne für die Bildung eines weißen Zwerges zu schwer sind, ist ein Ende des Sterns als Supernova zwangsläufig. Sehr massereiche Sterne erreichen nicht einmal das Stadium roter Riesen.

Am Ende der Entwicklung vereinen sich also beide Gruppen wieder. Es kommt zu einem Gravitationskollaps im Kern, der als Supernova (Typ II) in Erscheinung tritt, in letzter Konsequenz den Stern zerstört und sein prozessiertes Material dem interstellaren Medium aus dem er entstand wieder zuführt.

1.1.2 Sterne geringer und mittlerer Masse

Sobald im Kern der Wasserstoff aufgebraucht ist endet das zentrale Wasserstoff-Brennen. Das heißt nicht, daß dort kein Wasserstoff mehr vorhanden ist. Entscheidend ist ein starker Abfall der Energieerzeugungsrate der entsprechenden Reaktionen. Sterne unter $2M_\odot$ zeigen eine Zwischenstufe mit Wasserstoff-Schalenbrennen und nähern sich im HRD asymptotisch dem Riesenast (A-RGB). Dort, auf dem Riesenast (RGB), zünden im Kern die Helium-Fusionsreaktionen und die Sterne geringer sowie mittlerer Masse erscheinen als rote Riesen. Schließlich werden auch hier die Bedingungen für das He-Brennen im Kern zu ungünstig und es kommt zur Ausbildung einer Schale in der das He-Brennen weiter nach außen läuft (He-Schalenquelle) solange die Bedingungen am Ort der Schale dies ermöglichen. Die H-Schalenquelle ist in dieser Phase verloschen.
Im HRD entwickelt sich der Stern zu höheren Leuchtkräften L und geringeren effektiven Temperaturen T_{eff}. Die Flußdichte isotroper Strahlung ist nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz $F = \sigma T^4$ und damit besteht zwischen L und T_{eff} der Zusammenhang (2). Daher muß in der Folge der Sternradius R anwachsen.

$$L = 4\pi R^2 \cdot F = 4\pi R^2 \cdot \sigma T_{eff}^4 \tag{2}$$

Damit wiederholt der Stern im Grunde die Entwicklung die ihn von der ZAMS zum RGB geführt hatte. Der Stern hat im HRD den Horizontal Ast bereits verlassen und ist jetzt auf dem frühen asymptotischen Riesenast (E-AGB = early).
Schon zu diesem Zeitpunkt können Massenverluste die weitere Entwicklung wesentlich beeinflussen. Man beobachtet an diesen Sternen signifikante Massenverlustraten durch kühle Sternwinde. Sind diese so groß, daß vor dem erneuten Zünden der H-Schalenquelle der Stern bereits seine gesamten äußeren Schichten verloren hat, kann er nicht zum alternierenden Brennen von H- und He-Schalenquelle gelangen. Damit durchläuft er auch nicht die Phase der thermischen Pulse.

Sterne, die anfänglich über $6M_\odot$ schwer waren, kommen direkt zu Kohlenstoff-Fusionsreaktionen im Kern. Dagegen durchlaufen die Sterne unter $6M_\odot$ die TP-AGB Phase. Diese Grenzmasse ist damit aber noch nicht eindeutig festgelegt. Unter Einschluß von Massenverlusten finden thermische Pulse nur dann statt, wenn die anfängliche Masse M_i unter $4M_\odot$ (Pop.I) bzw. unter $3M_\odot$ (Pop.II) liegt [Sackmann und Boothroyd 1991].
Ist die He-Schalenquelle, die den E-AGB bestimmt, so weit verbraucht, daß die Energieerzeugungsrate der entsprechenden Reaktionen stark abfällt, kommt es zur erneuten Zündung des H-Brennens in den darüberliegenden wasserstoffreichen Außenschichten des Sterns. Damit setzt die TP-AGB Phase mit abwechselnd dominantem Brennen in Wasserstoff- und Helium-Schalenquelle, wie auch die namensgebenden Flashes der He-Schalenquelle ein. Unter den Quellen liegt ein entarteter C-O–Kern. Die thermischen Pulse zeigen sich nach außen als Variationen der Helligkeit des Sterns.
Anders als für Sterne großer Masse findet die Entwicklung für geringe und mittlere Massen ein deutlich *ruhigeres* Ende. Endstadium sind hier weiße Zwerge, also elektronen-entartete Sterne.
Für diese Sterne existieren auch andere Zusammensetzungen als die übliche Wasserstoff dominierte: Helium oder Kohlenstoff/Sauerstoff. Entscheidend ist hier die anfängliche Sternmasse und die Annahme großer Massenverluste im Stadium eines roten Riesen. He-weiße Zwerge entstanden vermutlich aus $M_i > 2.3M_\odot$. Für C-O-weiße Zwerge liegt der maximale Ausgangswert bei $M_i \approx 8 \pm 2M_\odot$, hier muß man aber von drastischen Massenverlusten ausgehen [Weidemann und Schönberner 1990].
Sterne geringer Masse haben im Stadium roter Riesen bzw. auf dem AGB einen signifikanten Beitrag für die rote/infrarote Leuchtkraft von Galaxien und alten Clustern durch ihre sehr hohen Leuchtkräfte.
Sterne mit $M_i \approx 1 \ldots 6M_\odot$ erreichen, bevor sie am Ende auch zu weißen Zwergen werden, noch eine Zwischenstufe in der sie als Spektraltyp C oder S erscheinen (Siehe S.19).

Im weiteren beschränkt sich die Betrachtung auf Sterne die den AGB während ihrer Entwicklung durchlaufen, also solche geringer und mittlerer Masse.

1.2 Energieerzeugung auf der Hauptreihe

Schon auf der ZAMS ist die für die Energieerzeugung dominante Reaktion abhängig von der anfänglichen Sternmasse. Die Temperaturabhängigkeit der entsprechenden Energieerzeugungsraten zeigt Bild 15 S.22. Die Hauptreihe läßt sich in zwei Bereiche einteilen:

Untere Hauptreihe — $M_i < 1.5 M_\odot$
Im Zentrum des Sterns liegen die Temperaturen T_c unter 2×10^7 K, daher dominiert hier die Wasserstoff-Fusion nach der pp-Kette. Die Energieerzeugungsrate ε_{pp} ist nur relativ gering von der herrschenden Temperatur abhängig: $\varepsilon_{pp} \sim \rho T^5$.
Der Ort effektiver Energiefreisetzung ist räumlich nicht so stark konzentriert sein. Der Kern kann sich im Strahlungsgleichgewicht mit nur kleinen Temperatur-Gradienten befinden. Er ist von einer konvektiven Wasserstoff-Hülle umgeben.

Obere Hauptreihe — $M_i > 1.5 M_\odot$
Hier findet man höhere Temperaturen im Zentrum mit $T_c > 2 \times 10^7$ K und damit dominiert der CNO-Zyklus die Energieerzeugung. Hier gilt aber eine deutlich andere Temperaturabhängigkeit: $\varepsilon_{CNO} \sim \rho T^{15}$. Der Kern ist konvektiv, die Temperatur-Gradienten sind sehr steil und in kleinen Abständen vom Zentrum findet man große Energieflüsse. Die effektive Energieerzeugung bleibt im wesentlich eng auf das Sternzentrum begrenzt, je größer dabei die Sternmasse ist, umso größer ist auch der konvektive Kern des Sterns.

1.3 Der Weg von der ZAMS zum AGB

Die stellare Materie kann als ein ideales Gas angesehen werden. Der herrschende Gasdruck ist nach der idealen Gasgleichung $P = N\,kT$. Für ein ideales Gas müssen Volumen der Teilchen und deren Wechselwirkung untereinander vernachlässigbar klein sein. Beide Bedingungen sind hier erfüllt, da die Materie praktisch vollständig ionisiert ist und durch die Ablösung der Elektronen, der Durchmesser der Atome auf den der Atomkerne „absinkt". Für eine genügend große Temperatur wird auch die Coulomb Wechselwirkung gegenüber der thermischen Bewegung vernachlässigbar.

Mit der Zeit verändert die im Sterninneren ablaufende Fusionsreaktion von Wasserstoff zu Helium (H-Brennen) die für die ZAMS angenommene homogene chemische Zusammensetzung (mit den Massenanteilen X,Y für Wasserstoff bzw. Helium).

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial t} \tag{3}$$

Damit verringert sich die Zahl der Teilchen pro Masseneinheit was gleichbedeutend ist mit einem Wachsen des mittleren Molekulargewichtes μ, das wie folgt definiert ist:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{X_i\,(Z_i+1)}{A_i} \;\approx\; 2\,X_{\mathrm{H}} + \frac{3}{4}\,X_{\mathrm{He}} + \frac{X_{\mathrm{Rest}}}{2} \tag{4}$$

Dabei sind X_i, Z_i und A_i der Massenanteil, die Ordnungszahl und das Atomgewicht der jeweiligen Elementsorten. Die Näherung im zweiten Teil der Gleichung (4) ist gültig falls Wasserstoff und Helium, wie es in Sternen der Fall ist, überwiegen. Für die schwereren Elemente gilt dann in dieser Näherung: $Z_i + 1 = A_i/2$.
Man kann nun an der Grenze r_1 zwischen dem heliumreichen Inneren $r_i < r_1$ und dem wasserstoffreichen Äußeren $r_a > r_1$ eine Gleichgewichtsbedingung aufstellen. Dort sollen Druck, Temperatur und Anzahldichten stetig bleiben: $P_i = P_a, \quad T_i = T_a, \quad N_i = N_a$.
Das H-Brennen führt zu einem $\mu_i > \mu_a$ und verkleinert die Gesamtzahl $N_i\,V_{Kern}$ der Teilchen im Gebiet des Kerns. Da sich aber N_i nicht geändert hat, muß das Volumen des Kerns V_{Kern} sinken. Daraus resultiert ein Dichtesprung an der Grenze r_1: $\rho_i = N_i \mu_i m_H \; > \; \rho_a = N_a \mu_a m_H$.
Aus der Grundgleichung der Massenerhaltung folgt dann

$$\frac{d\ln r}{d\ln M_r} = \frac{dr}{r}\,\frac{M_r}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(r)}\,\frac{M_r}{r} = \frac{3\;M_r}{3\;4\pi\,r^3}\,\frac{1}{\rho(r)} = \frac{1}{3}\,\frac{\overline{\rho_r}}{\rho(r)} \tag{5}$$

$$\ln R - \ln r_1 = \frac{1}{3} \int\limits_{\ln M_r(r_1)}^{\ln M_r(R)} \frac{\bar{\rho_r}}{\rho} \, d\ln M_r \tag{6}$$

Mit sinkendem Kernvolumen wächst der Integrand $\bar{\rho_r}/\rho$ und damit auch der Sternradius R selbst. Mit wachsendem R sinkt die effektive Temperatur T_{eff} des Sterns leicht ab und mit der Zunahme des mittleren Molekulargewichtes im Sternzentrum steigt auch die Leuchtkraft des Sterns an, im HRD wird er zu einem roten Riesen.

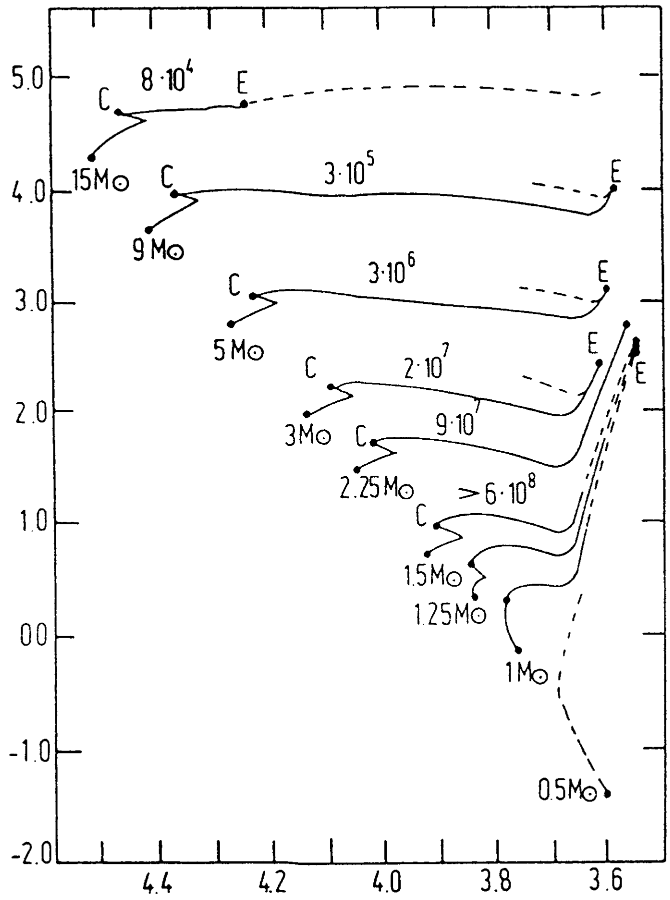


Bild 4: Sternentwicklung im HRD $\log L[L_\odot]$ über $\log T_{eff}$
$X = 0.71, Y = 0.27, Z = 0.02$ und $M = 0.5 \ldots 15 M_\odot$
[Iben 1967, Fig. 3].

Für einen Stern mit $4 \ldots 8 M_\odot$ ist die typische Zeitskala des zentralen H-Brennens mit Anfang auf der ZAMS: $\tau_H = 8..2 \times 10^7$a, nach 95% dieser Zeit ist der Wasserstoffanteil im Kern auf 5% abgesunken, am Ende ist praktisch kein Wasserstoff mehr im Kern vorhanden.

Die Entwicklung von der ZAMS ist für verschiedene Massen prinzipiell ähnlich. In Bild 4 ist dies am Beispiel der relativ metallreichen Population I zu sehen.

Das zentrale H-Brennen auf der ZAMS verändert die chemische Zusammensetzung des Kerns. In der Folge wandert der Stern im HRD zu höheren Leuchtkräften L nach oben und zu tieferen effektiven Temperaturen T_{eff} nach rechts. Das H-Brennen im Zentrum verlagert sich in eine Schale um den Kern herum (Punkt C), schließlich zündet das He-Brennen im Kern (Punkt E). Außerdem ist die Zeitspanne der Entwicklung C$\rightarrow$E in Jahren abzulesen. Mit steigender Masse beschleunigt sich die Entwicklung deutlich.

Beim zentralen H-Brennen verringert sich der Wasserstoff-Anteil im Kern ständig, er kann sogar völlig verbraucht werden. Sobald die Bedingungen für eine effektive Energieerzeugung im Kern durch das H-Brennen zu ungünstig werden und für das He-Brennen ebenfalls noch nicht ausreichen, verlagert sich die H-Brennzone nach außen. Es kommt zur Ausbildung einer Schalenquelle über dem nicht-brennenden Kern (Bild 5).
Die effektive Energieerzeugung ist dabei auf eine kleine Schale konzentriert, in der Temperatur und Druck ein Wasserstoff-Brennen ermöglichen. Ob dabei die pp-Kette oder der CNO-Zyklus vorherschen hängt im wesentlichen von der Temperatur ab. Bei Sternen mit $M_i < 1.5 M_\odot$ dominiert die pp-Kette. In dem schmalen Gebiet der Schale, steigt die, die Massenschale m passierende Leuchtkraft l_m an, d.h. es wird Energie freigesetzt. Über dieser Schale (in der Masse) bleibt l_m konstant.

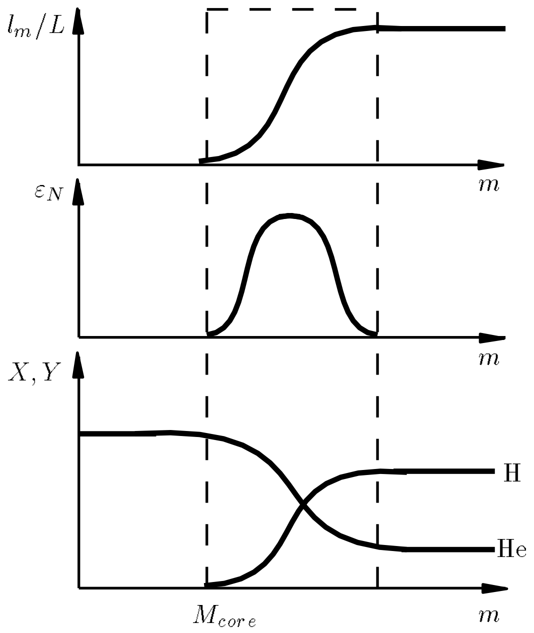


Bild 5: Prinzip der Schalenquelle [Ritter 1988].

Der Kern besteht dann überwiegend aus Helium, sein Rand wird durch die Grenze zwischen Helium- und Wasserstoff-reichen Schichten gekennzeichnet. Auf diese Art wächst die Kernmasse M_{core} an, im Kern selbst findet keine Energieerzeugung mehr statt.
Ohne Energieerzeugung kann man den Kern als isotherm ansehen. Er wird durch die Schalenquelle darüber geheizt. Die Temperatur am Innenrand der Schalenquelle entspricht daher der des Kerns selbst: $T_{Schale} = T_{core}$.
Werden die Bedingungen in Druck und Temperatur für ein weiteres H-Brennen zu ungünstig, hat man den Außenrand der Schalenquelle erreicht. Dort verschwindet dann die nukleare Energieerzeugungrate ε_N. Mit fortschreitendem H-Brennen in der Schale erschöpft sich der Brennstoff an ihrem inneren Rand. Dies hat zur Folge, daß sich die Schale immer weiter nach außen brennt, solange die Umgebungsbedingungen dies noch ermöglichen.

Temperatur und Dichte im He-Kern steigen dabei langsam an. Sind sie groß genug um das He-Brennen zu zünden, muß man für die weitere Entwicklung wieder zwischen geringer und mittlerer Sternmasse unterscheiden. Die Art der Zündung des He-Brennens im Kern erweist sich dabei als ein kritischer Punkt der Entwicklung.

1.3.1 He-Brennen für $M = 1 \ldots 2.3 \ldots 2.5 M_\odot$

Für Sterne geringer Masse ist der He-Kern bereits bei seiner Entstehung elektronen-entartet. Das ist deshalb der Fall, weil seine Masse die Schönberg-Chandrasekhar Grenze überschritten hat. Diese Grenze ist die Masse eines nichtentarteten und nicht-brennenden He-Kerns, der sich mit seiner Hülle im Gleichgewicht befindet.

$$q_{SC} = \left(\frac{M_c}{M}\right)_{SC} \approx 0.37 \left(\frac{\mu_H}{\mu_c}\right)^2 \tag{7}$$

Mit $\mu_H = 0.67$ sowie $X = 0.60, Y = 0.38$ ist $\mu_c = 1.33 \Rightarrow q_{SC} \approx 0.10$. Sobald das Verhältnis $M_c/M > q_{SC}$ wird, drückt die Hülle den Kern zusammen. Da für diesen Fall mit dem Ansatz eines idealen Gases keine stabile Lösung mehr existiert, kommt es zur Entartung im Kern.

Dieser besitzt dann bereits eine hohe Ähnlichkeit mit einem Helium-Weißen Zwerg. Bei diesem Übergang ändern sich auch die Hülleneigenschaften recht drastisch.

Gas ist	R_{core}	R_*	Stern ist
ideal	groß	klein	auf Hauptreihe
entartet	klein	groß	Roter Riese

Die Entwicklung eines Sterns geringer Masse zum zentralen He-Brennen soll nun nach [Thomas 1967] am Beispiel eines $1.3 M_\odot$-Sterns verfolgt werden. Die Änderung der inneren Struktur und der Lage im HRD zeigt Bild 6. Bild 7 verfolgt schließlich Temperatur und Dichte für eine bestimmte Massenschale zu einem kritischen Zeitpunkt der Entwicklung: der Zündung des zentralen He-Brennens.

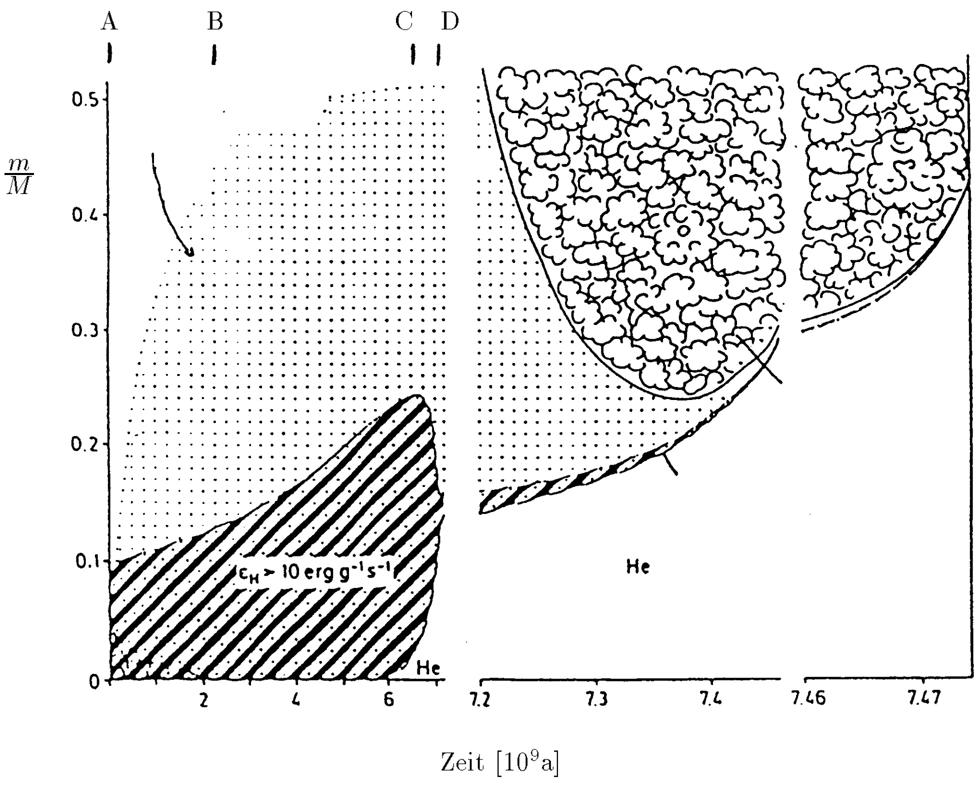
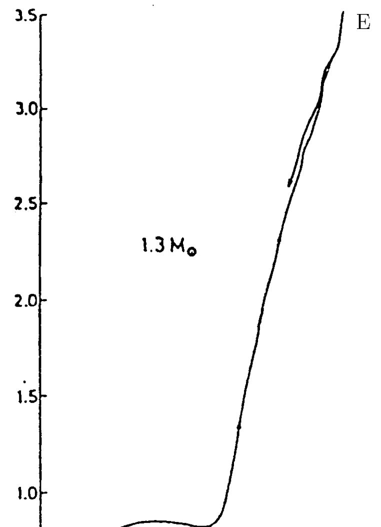


Bild 6: Entwicklung eines $1.3 M_{\odot}$ Sterns. Oben innere Struktur, unten entsprechendes Erscheinungsbild im HRD $\log L/L_{\odot}$ über T_{eff} [Thomas 1967, Abb. 1,2].



Die schraffierten Gebiete stehen für effektive Energieerzeugung durch das Wasserstoff-Brennen, die wolkigen Gebiete sind konvektiv. Nach Punkt D wird der Maßstab der Zeitachse zweimal verkleinert, da sich die Entwicklung dann auf sehr kurzen Zeitskalen abspielt.

Die Entwicklung beginnt auf der ZAMS (Bild 6: A). Dort erzeugt der Stern seine Energie durch zentrales H-Brennen das einen He-Kern als Endprodukt entstehen läßt. Mit zunehmender Zeit dehnt sich die Zone effektiven H-Brennens in der Masse nach außen aus (B $\rightarrow$ C). Während dieser Entwicklung steigen auch die Leuchtkraft und die effektive Temperatur des Sterns an. Sobald im Kern die Energieerzeugung ineffektiv wird, wandert die H-Brennzone nach außen (C. . .D). Die Energie wird dann nicht mehr im Kern, sondern alleine in der ihn umgebenden H-brennenden Schalenquelle erzeugt. Der Kern wird nur noch von außen durch die Schalenquelle geheizt. Da im Kern nun keine Energie mehr erzeugt wird und der Druck zu sinken beginnt, versucht der Kern thermische Energie durch eine Kontraktion aus seiner Gravitationsenergie zu ziehen.

Der thermische Druck der Ionen ist vernachlässigbar, das Elektronengas ist entartet. Diese Entartung des Kerns verhindert eine schnelle Heizung während seiner Kontraktion. So werden die für die Reaktionen des zentralen He-Brennens nötigen Temperaturen noch nicht erreicht. Der Kern darf weiterhin als isotherm angesehen werden.
Die Entwicklung zum Helium-Flash läuft, verglichen mit der vorherigen Entwicklung sehr rasch ab. Betrachtet man die Massenschale in der der He-Flash einsetzt wird offensichtlich, wie stark sich Dichte und Temperatur hier ändern. Rechts von der gestrichelten Linie in Bild 7 setzt die Entartung der Materie ein. In dieser Phase liegt die gesamte Kernmasse bei $M_c \approx 0.45 \ldots 0.48 M_\odot$.

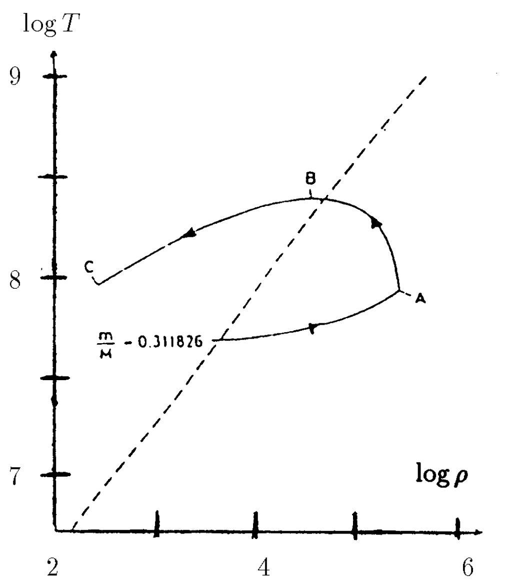


Bild 7: Massenschale, in der der He-Flash einsetzt nach [Thomas 1967, Abb. 3].

Nach einer Entwicklungszeit von $\sim 7.46 \times 10^9$ Jahren beginnt in der Massenschale $m/M = 0.311826$ die Entartung im betrachteten Modell. Innerhalb von 10^7 Jahren steigt die Dichte um zwei Zehnerpotenzen, während die Temperatur nur langsam zunimmt. Sind die für das zentrale He-Brennen nötigen 10^8 K erreicht (Punkt A), kommt es zum *thermal runaway* oder *Helium-Flash*. Der thermische Druck steigt an, spielt aber gegenüber dem Fermi-Druck der entarteten Elektronen keine wesentliche Rolle. Der Energieverlust des Kerns durch vom Druck geleistete Arbeit ist daher sehr gering und der Kern expandiert nur wenig. Die Temperatur steigt weitere 10^4 Jahre an, bis die Entartung im Kern aufgehoben ist (Punkt B). Eine Zunahme der Temperatur geht aber mit einer wachsenden Energieproduktion einher. Für das He-Brennen gilt: $\varepsilon_{3\alpha} \sim \rho^2\, T^{30}$. Innerhalb einer kurzen Zeit steigt mit der Temperatur auch die Energieproduktion drastisch an. Zeichen dieser thermischen Instabilität ist der He-Flash.

Die Leuchtkraft des hier betrachteten $1.3 M_\odot$ Sterns ist jetzt bis auf $\approx 3 \times 10^3 L_\odot$ gestiegen (Bild 6: HRD Punkt E). Der He-Flash selbst setzt eine Energie frei, die $\approx 10^{11} L_\odot$ entspricht. Sie wird zum größten Teil in die folgende Expansion umgesetzt in deren Folge die Stern-Leuchtkraft auf $50 \ldots 100 L_\odot$ absinkt. Nach dem Ende des He-Flashes laufen im Kern ruhige He-Fusionsreaktionen ab, darüber kann auch noch eine H-brennende Schalenquelle arbeiten.
Gehört der Stern zur Population I ($Z \gtrsim 0.01$), so bleibt er im HRD auf dem RGB nahe der Hayashi-Linie, die metallarmen ($Z < 0.01$) Population II-Sterne erreichen den Horizontal Ast (HB). Von dort wird die weitere Entwicklung zum AGB hinauf führen.
Auf dem Riesenast nahe der Hayashi-Linie zeigen Sterne geringer Masse große Massenverlustraten. Hier ist $M_c(\mathrm{He}) \approx 0.5 M_\odot$ und die Sternmasse $M_* \approx 0.6 \ldots 0.9 M_\odot$
Die hohen Leuchtkräfte während eines Flashes erschweren die Berechnung, da sie wahrscheinlich einen Massenverlust durch einen strahlungsgetriebenen Wind zur Folge haben. Die Lage auf dem Horizontal Ast hängt davon ab, wie dick die verbleibende Wasserstoff-Schale noch ist.
Schließlich erlischt auch das zentrale Helium-Brennen. Über dem vorwiegend aus Kohlenstoff und Sauerstoff bestehenden Kern bleibt eine He-Schalenquelle zurück. In einigen wenigen thermischen Pulsen läuft dort noch effektives He-Brennen ab. Am Ende sind Wasserstoff und Helium praktisch völlig verbraucht und der Stern stößt seine letzte Hülle ab. Zurück bleiben ein planetarischer Nebel (die letzte Hülle) und ein weißer Zwerg (der ehemalige Sternkern). Überschreitet die Masse des Kerns aber die Chandrasekhar'sche Grenzmasse für einen stabilen elektronenentarteten Stern von $1.4 M_\odot$, so ist der nächste mögliche stabile Zustand des Kerns der eines Neutronensterns. Für Einzelsterne geringer Masse kann dieser Zustand aber nicht erreicht werden, nur ein Massenstrom von einem Begleitstern könnte eine solche Entwicklung noch auslösen.

1.3.2 He-Brennen für $M \approx 2.3...15M_\odot$

Bei Sternen mittlerer und großer Masse entsteht durch das Wasserstoff-Brennen ebenfalls ein Helium Kern. Nach dem Ende des zentralen H-Brennens sind abhängig vom Massenverhältnis Kern- zu Sternmasse $q_0 = M_c/M$ zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Sternmasse liegt unter $5M_\odot$, $q_0 < q_{SC}$.
   Das einsetzende H-Schalenbrennen geht solange weiter, bis die Kernmasse die Schönberg-Chandrasekhar-Grenze erreicht, dann kommt es zu einer Kernkontraktion die mit einer Hüllenexpansion gekoppelt ist. Die Expansion findet in der Kelvin-Helmholtz-Zeitskala τ_{KH} statt. Mit den stellaren Parametern Masse M, Radius R und Leuchtkraft L, sowie der allgemeinen Gravitationskonstante G (siehe S.23).
   $$\tau_{KH} \approx \frac{GM^2}{2RL} \qquad (8)$$
   Auf dieser Zeitskala stellt sich ein thermisches Gleichgewicht ein. Diese Entwicklung verläuft sehr rasch, der Stern *springt* im HRD nach rechts zum Gebiet der roten Riesen.

2. über $5M_\odot$, $q_0 > q_{SC}$ Hier ist ein ruhiges H-Schalenbrennen unmöglich.

Bild 8 zeigt die Entwicklung im Sterninneren zwischen der Bildung der H-Schalenquelle (C) und dem Zünden (D) des zentralen He-Brennens. Der $7M_\odot$-Stern dieses Bildes wird im großen und ganzen als analog zu dem $5M_\odot$-Stern der Bilder 10 und 9 angesehen. Daher gilt das folgende für alle drei Bilder, die Marken entsprechen jeweils gleichen Entwicklungsphasen.

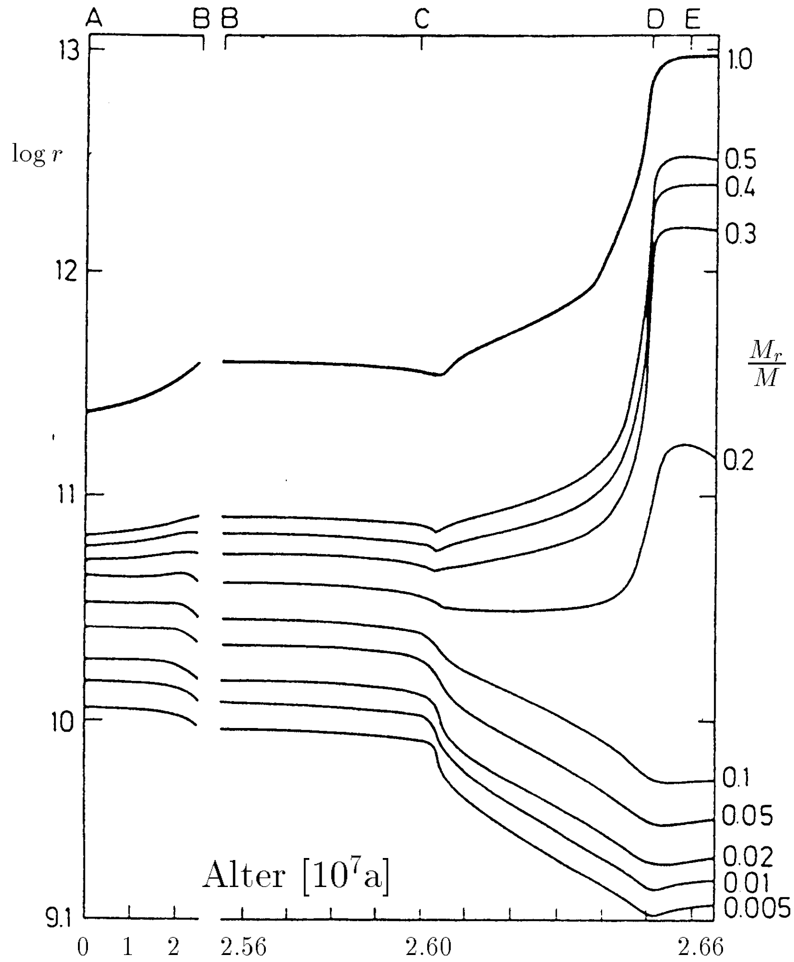


Bild 8: Zeitabhängigkeit der Massenschalenradien für ein $7M_\odot$-Modell. Spiegelungsprinzip bei $M_c/M = 0.15$ [Hofmeister *et al.* 1964, Abb. 3].

Das zentrale H-Brennen (A $\rightarrow$ B) hat auch für mittlere Massen einen He-Kern gebildet der hier aber nicht entartet ist. Damit kann die spätere He-Zündung unter nichtentarteten Bedingungen stattfinden. Mit der Bildung der H-Schalenquelle (C), ändern die Massenschalen ihre Radien sehr deutlich. Verglichen mit der vorherigen Entwicklung findet diese Änderung in einer sehr kurzen Zeitspanne (C $\rightarrow$ D) statt. Die Hülle expandiert, die Radien der zugehörigen Massenschalen wachsen, dagegen kontrahiert gleichzeitig der Kern. Dieser Vorgang wird auch *Spiegelungsprinzip* genannt. Erst durch die Zündung des zentralen He-Brennens (E) endet diese Entwicklung.

Das zentrale He-Brennen wird von den Reaktionen $3\alpha \rightarrow^{12}$C und $\alpha+^{12}$C $\rightarrow^{16}$O dominiert. Die Reaktionen im Zentrum dauern nur ungefähr 20% der H-Brennzeit an. Die enorme Temperaturabhängigkeit der Energieerzeugungsrate des 3α-Prozesses von $\varepsilon_{3\alpha} \sim \rho^2\, T^{30}$ führt zu einer wesentlich kleineren Helium- als (zuvor) Wasserstoff-Brennzone.

Während dieser Phase stammt die Leuchtkraft des Sterns aber im wesentlichen noch aus der H-Schalenquelle darüber. Für $M = 2.5 \ldots 5M_\odot$ ist der Kern konvektiv, so daß der Stern während des zentralen He-Brennens im HRD nahe der Hayashi-Linie zu finden ist.

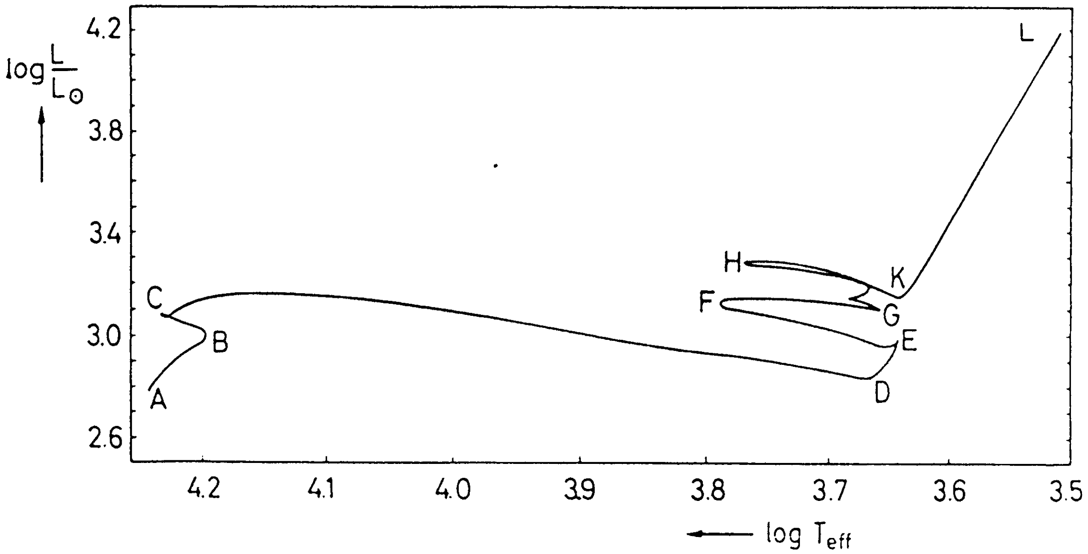
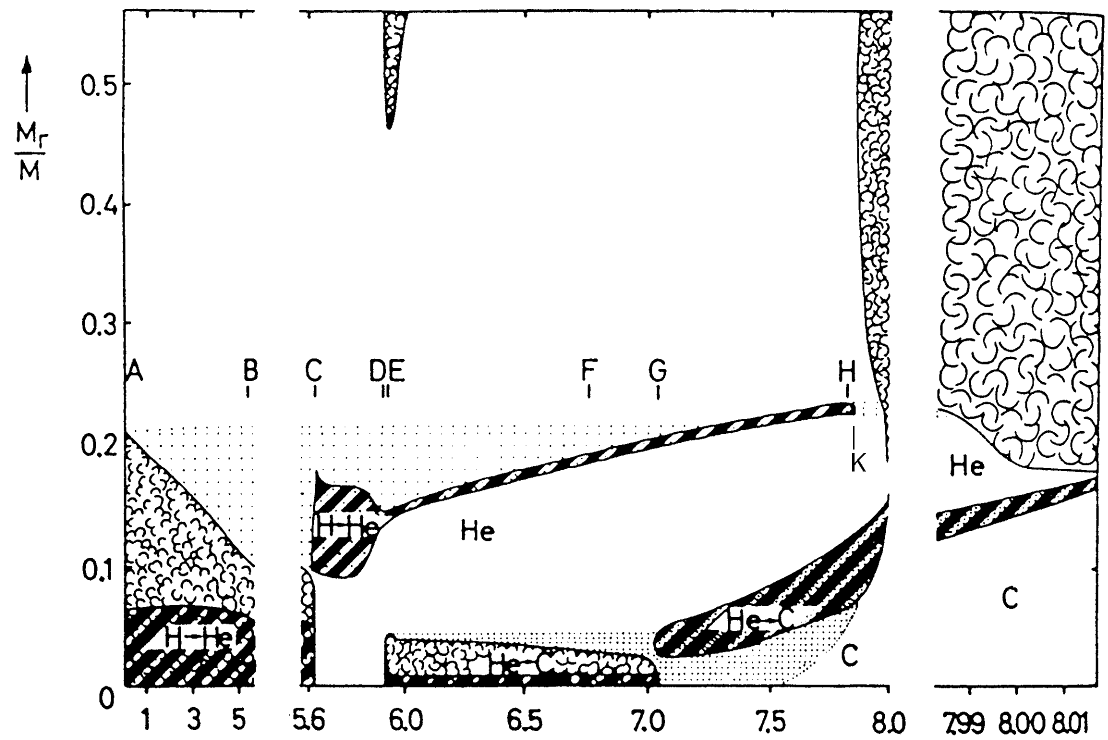


Bild 9: Entwicklungsweg eines $5M_\odot$ Sternes im HRD [Kippenhahn *et al.* 1965, Abb. 1].

Die Entwicklung im Inneren des Sterns (Bild 10) zeigt im besonderen (schraffiert) die Gebiete in denen die jeweiligen nuklearen Energieerzeugungsraten $\varepsilon_N > 10^3$erg/(g·s) sind, (wolkig) konvektive Gebiete und (punktiert) Gebiete mit nach innen abnehmendem Wasserstoff- bzw. später Helium-Gehalt.

Während sich die H-Schalenquelle in der Masse nach außen verlagert (E $\rightarrow$ H), reduziert sich der Helium Vorrat im Zentrum. Ist dieser Vorrat erschöpft (G), so bildet sich eine He-brennende Schalenquelle aus. Darüber befindet sich immer noch eine H-brennende Schale. Im HRD hat der Stern inzwischen den frühen AGB erreicht und seine Leuchtkraft steigt langsam an. Das Ergebnis des zentralen He-Brennens ist ein C-O-Kern der mit der Zeit wächst und dabei (wie schon der He-Kern zuvor) kontrahiert.

Sobald die äußere, H-brennende, Schale erlischt (K), läuft der Stern im HRD erneut zur Hayashi-Linie. Wie zuvor beim H-Brennen steigt die Leuchtkraft an und die effektive Temperatur sinkt ab. Die äußere Konvektionszone dehnt sich weiter nach innen aus und erreicht dabei Gebiete, in denen bereits Brennprozesse abgelaufen sind. Damit können die Reste des CNO-Zyklusses an die Sternoberfläche transportiert werden (L).



Alter in 10^7 Jahren

Bild 10: Entwicklung des innerer Aufbaus eines $5M_\odot$ Sternes [Kippenhahn *et al.* 1965, Abb. 2].

1.4 Thermische Pulse auf dem AGB

Neben der frühen (E-AGB) existiert noch eine weitere Phase auf dem AGB: die der thermischen Pulse (TP-AGB). Nicht jeder Stern kann diese Phase in seiner Entwicklung durchlaufen. Unter Einschluß von Massenverlusten in der E-AGB Phase zeigt sich, daß es möglich ist, vor dem erneuten Zünden der H-Schalenquelle die wasserstoffreichen äußeren Schichten soweit abzutragen, daß der Stern in der Folge keine He-Schalen–Flashes mehr erleben wird.
Oberhalb einer kritischen Anfangsmasse M_W wird die Phase der thermischen Pulse nicht mehr erreicht. Für Sterne der Population I/II liegt sie bei $M_W = 4$ bzw. $3M_\odot$. Außerdem beginnt die TP-AGB Phase für Sterne der Population I bereits bei geringeren Kernmassen, als für Population II [Sackmann und Boothroyd 1991].
Die folgende Beschreibung der thermischen Pulse orientiert sich an [Iben und Renzini 1983].

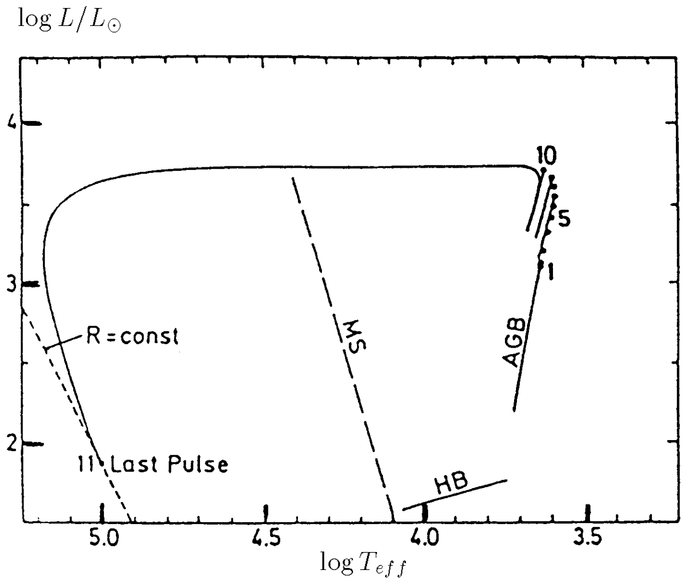


Bild 11: Entwicklungsweg $0.6M_\odot$ (AGB) mit $X = 0.749$, $Y = 0.25, Z = 0.001$ nach dem zentralen He-Brennen [Iben und Renzini 1983, Fig. 5].

Zu Beginn der TP-Phase findet man die H-Schalenquelle (in der Masse) bei M_H. Hier gilt für Sterne der Population I bei mittlerer Masse: $M_\mathrm{H} \approx 0.59 + 0.0526 M_i$ (Anfangsmasse M_i) und bei geringer Masse $M_\mathrm{H} \sim 0.53$. Bild 11 zeigt den Entwicklungsweg eines Sterns dessen Masse bei Erreichen des AGB auf $0.6M_\odot$ reduziert war. Nach dem zentralen He-Brennen läuft das Modell vom HB aus den (E-)AGB hinauf bis die thermischen Pulse auftreten. Die Punkte markieren den Beginn der einzelnen Pulse. Als Beispiel sind für den 7., 9. und 10. Puls auch die Änderungen im HRD (sehr deutlich in der Leuchtkraft) angegeben. Nach dem 10. Pulse verläßt das Modell den AGB und ist mit dem 11. und letzten Puls bereits ein heißer weißer Zwerg.

Bestimmend für die TP-AGB Phase ist das Doppelschalenbrennen und die damit verbundenen wiederholten Flashes der He-Schalenquelle. Der zeitliche Ablauf der thermischen Pulse ist dabei nahezu periodisch. Außerdem sind nicht nur die Schalen selbst davon betroffen, die Gesamtleuchtkraft des Sterns verändert sich ebenfalls periodisch. Die Zyklen zeigen dabei ein gewisses Maß an Selbstähnlichkeit.
Die Anzahl der thermischen Pulse steigt mit der Kernmasse an, für $M_c \approx 1.4M_\odot$ erhält man bereits 10^4 Pulse. Hier findet die Rechnung schon aus praktischen Gründen ein Ende. Für eine so große Kernmasse führt ein He-Schalen-Flash dann zur Freilegung eines C-O–weißen Zwerges.
Die Leuchtkraft variiert für den TP-AGB im wesentlichen mit vier Zeitskalen:

1. Dynamische Oszillationen der Hülle des Sterns. Einige hundert Tage bis zu einigen Jahren.
2. Die thermischen Pulse auslösende Instabilität. Einige Jahre oder weniger.
3. Thermische Relaxation nach einem Puls, d.h. Rückkehr in die Phase ruhigen Brennens. Diese Zeit ist stark von der Kernmasse abhängig: $M_{core} \approx 0.6 \ldots 1.4 M_\odot$ entsprechen Zeitskalen von einigen $10^5 \ldots < 30$ Jahren.
4. Zeit, in der die Bedingungen geschaffen werden, die zu einem He-brennenden *thermal runaway* führen. Sie ist vergleichbar mit der vorhergehenden Zeitskala.

Das Erscheinungsbild der thermischen Pulse zeigt Bild 12. Betrachtet wird ein Stern mit anfänglich $7M_{\odot}, Y = 0.28, Z = 0.02$. Zwischen dem 7. und 8. Puls ist $M_H \sim 0.96$. Neben den globalen Parametern Sternradius $R_s[R_{\odot}]$, Oberflächenleuchtkraft $L_s[L_{\odot}]$ und -temperatur T_e[K] sind auch die inneren Veränderungen der Energieerzeugungsrate durch H- bzw. He-brennende Reaktionen $L_{\mathrm{H}}, L_{\mathrm{He}}[L_{\odot}]$ sowie die Lagen in der Masse $[M/M_{\odot}]$ der H-He Diskontinuität M_{XY}, der Basis der konvektiven Hülle M_{CE} und der Kohlenstoff Diskontinuität dargestellt.

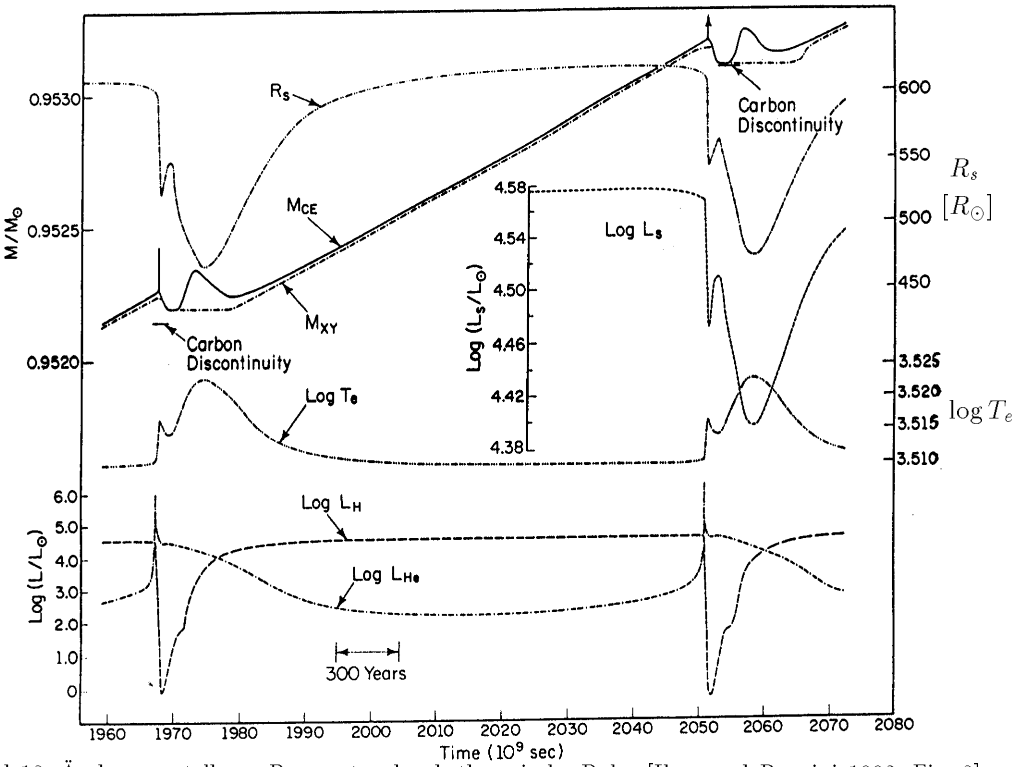


Bild 12: Änderung stellarer Parameter durch thermische Pulse [Iben und Renzini 1983, Fig. 2].

Thermische Pulse besitzen ein typisches Erscheinungsbild in der Leuchtkraft des Sterns L_s.

- *rapid dip*: Die Oberflächenleuchtkraft L_s 'stürzt' sofort nach dem rapiden Anstieg von L_{He} bis zu einem relativen Minimum ab. L_{H} ist praktisch verschwunden.
- *rise*: anschließender kurzer Anstieg in L_s.
- *extended postflash dip*: L_s fällt wieder ab bis zum absoluten Postflash-Minimum (Faktor 2-3 unter Pre-Flash Niveau), allerdings deutlich langsamer als zuvor. In dieser Phase ist $L_s \approx L_{\mathrm{He}}, L_{\mathrm{H}} \approx 0$ (d.h. praktisch verloschen).
- *interflash period*: L_{H} erholt sich langsam bis nach $\approx 30\%$ der Zeit eines Zyklusses das Pre-Flash Niveau von L_{H} und L_s wieder erreicht ist. Bis zum nächsten Flash findet ruhiges H-Schalenbrennen statt, während L_{He} weiter bis zu einem stabilen Niveau absinkt.

Die äußeren Ereignisse in der Gesamtleuchtkraft des Sterns geben Auskunft über das Wechselspiel der Brennprozesse in den Schalen seines Inneren.
Der He-Schalen Flash am Beginn des Pulses führt zur Bildung einer konvektiven Schicht (siehe auch Bild 14, S.18) die von der He-Schalenquelle bis fast zur H-Schalenquelle hinauf (in der Masse) reicht. Wie zuvor für den He-Flash im Kern ist die wesentliche Energiequelle der thermischen Pulse die 3α-Reaktion. Das He-Brennen selbst findet unter nichtentarteten Bedingungen zwischen der Wasserstoff–Helium–Diskontinuität (M_{XY}) und dem elektronenentarteten C-O–Kern statt. In der He-Brennzone und ihrer Umgebung steigt die thermische Energie der Materie, und damit

auch direkt der lokale Druck. Dies setzt eine Expansion in Gang die auch Materie an der XY-Diskontinuität und darüber zu Gebieten geringerer Temperatur und Dichte mitnimmt, was ein Erlöschen des H-Brennens zur Folge hat.

Im Flash erreicht L_{He} maximale Werte von $10^7 \ldots 10^8\ L_\odot$. Als Folge der durch den Flash ausgelösten Expansion, beginnen die Temperaturen in der Brennzone wieder zu sinken und L_{He} fällt anfangs rasch ab. Die Konvektion setzt aus und der Stern findet sich in einer Phase ruhigen He-Schalenbrennens wieder in der L_s fast ausschließlich aus dem He-Brennen entstammt.

Ist die Expansion zu weit fortgeschritten, setzt eine Abkühlung ein und auch die Energiefreisetzungsrate der He-Schalenquelle beginnt abzufallen. Fällt L_{He} unter L_s, kehrt sich die Expansion um. Die Materie fällt wieder nach innen zurück und heizt sich solange auf, bis das H-Brennen erneut gezündet wird. L_{He} fällt und L_{H} steigt weiter bis ein stabiler Zustand erreicht wird mit $L_s \approx L_{\mathrm{H}}$ und $L_{\mathrm{He}} \ll L_{\mathrm{H}}$.

Die H-brennende Schalenquelle verlagert sich mit der Zeit (in der Masse) nach außen. Damit nimmt die Masse der darunterliegenden Schichten zu, dort steigen auch Temperatur und Dichte. Die Energieerzeugungsrate der He-Schalenquelle beginnt wieder zu steigen.

Ist von der H-Schalenquelle eine kritische Masse ΔM_{H} prozessiert worden beginnt der nächste thermische Puls. Die Energieerzeugungsrate der He-Schalenquelle wird so groß, daß diese Energie nicht mehr durch Strahlungsdiffusion entweichen kann. An der Basis der He-Schale setzt der *thermal runaway* ein und der Zyklus wiederholt sich.

Die beiden folgenden Bilder stellen die Strukturen an den Schalenquellen für die ersten thermischen Pulse bei einem $5M_\odot$-Modell dar.

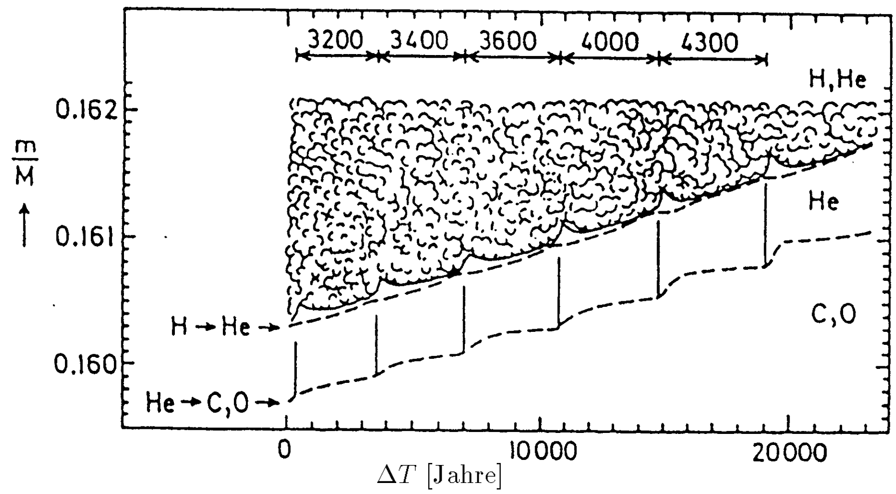


Bild 13: Schalenquellen bei den ersten 6 thermischen Pulsen, 5 $M_\odot$ [Weigert 1966, Abb. 5].

Die Zeit- und die Tiefenskala sind in Bild 13 und 14 stark gestreckt. Daher sind nur die beiden Schalenquellen erfasst. In den schraffierten Gebieten (in Bild 13 nicht erkennbar) ist die nukleare Energieerzeugungsrate $\varepsilon_N > 3 \times 10^7$ erg/(g·s). Mit jedem Puls verlagern sich die Schalenquellen zunehmend in der Masse nach außen. Das bedeutet, daß die Masse des C-O–Kerns mit der Zeit zunimmt.

Über der H-Schalenquelle liegt die große äußere Konvektionszone (OCZ), auch zwischen beiden Schalenquellen bildet sich eine Konvektionszone. Allerdings ist diese Interschalen-Konvektionszone (CS) so kurzlebig, daß sie erst im extremen Zeit-Maßstab von Bild 14 sichtbar wird. Die kleinen Skalen, sowohl zeitlich wie räumlich (besser: in den Massenschalen), zeigen deutlich, wie fein die Auflösung in Zeiten und Tiefen sein muß, will man die thermischen Pulse im Modell fassen.

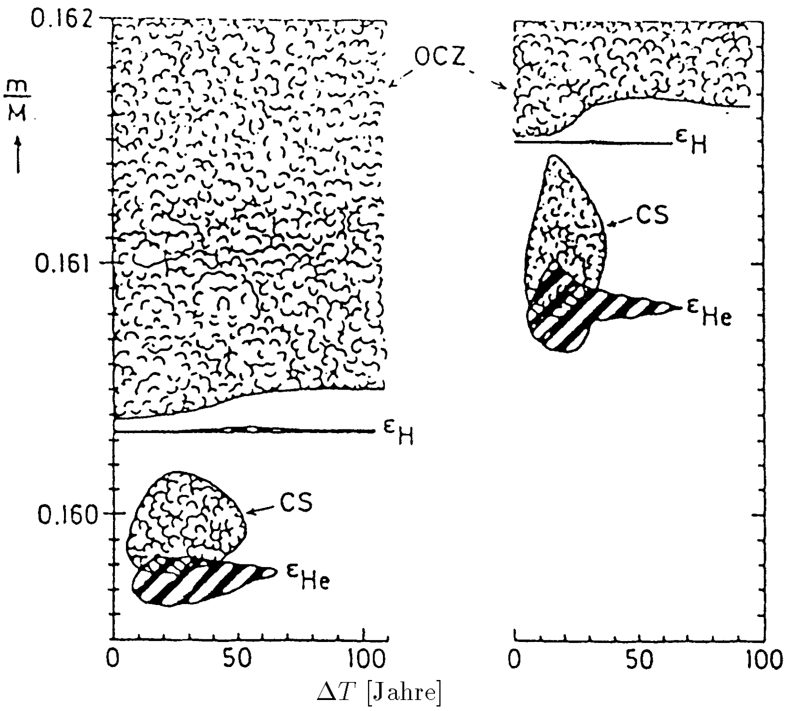


Bild 14: nahe den Maxima des 1. und 6. Pulses, $5M_\odot$ [Weigert 1966, Abb. 6].

Der Einfluß der thermischen Pulse auf die äußere Erscheinung eines Sterns ist abhängig von der Masse M_e seiner H-reichen äußeren Schichten. Ein AGB-Stern mit $M_e \gtrsim 2M_\odot$, also großer Masse, dämpft die Effekte der Pulse stärker ab. Hier fällt die Oberflächenhelligkeit im *extended postflash dip* für eine Zeit die 20% der Interpuls-Periode entspricht um $\Delta \log L_s \sim 0.2$ ab.
Befindet sich dagegen nur wenig Masse über den Schalenquellen (M_e klein) zeigen sich zusätzliche Effekte. Die Interpuls-Phase endet hier durch einen extrem raschen Abfall in L_s. Die H-Schalenquelle ist erloschen und L_{He} rapide durch die Expansion und Abkühlung gefallen. Unmittelbar nach dem anfänglichen *rapid dip* steigt L_s wieder stark an, da der untere Anteil der He-Schalenquelle wieder kontrahiert, sich erneut aufheizt und L_{He} vergößert. Hier wird für $\sim 1\%$ des Zyklus nahezu die doppelte Pre-flash Helligkeit erreicht. Der Einfluß auf die Oberflächenhelligkeit ist hier viel stärker: im *extended postflash dip* ist $\Delta \log L_s \sim 0.4$ für eine Zeit die 40% der Interpuls-Periode entspricht.

1.5 Struktur von AGB-Sternen – Zusammenfassung

Sterne auf dem Riesenast (RGB) haben einen kleinen He-Kern, der von einer dagegen sehr großen Wasserstoff Hülle umgeben ist. Für geringe Massen ist der Kern schon bei seiner Bildung entartet, darüber brennt dann eine dünne H-Schalenquelle. Abhängig von der Masse zündet das Helium im Kern ruhig oder in einem He-Flash, der Stern bewegt sich im HRD auf den Horizontal-Ast (HB). Nach dem Ende des zentralen He-Brennens führt die weitere Entwicklung für Sterne mittlerer bzw. geringer Masse vom HB aus direkt auf oder nahe an den asymptotischen Riesenast (AGB). Dies gilt nahezu allgemein, außer für sehr blaue Sterne des Horizontal Astes die sich ohne *Umweg* vom HB aus zu weißen Zwergen entwickeln.
Die anfängliche Masse eines Sterns auf der Hauptreihe entscheidet bereits darüber, ob er den AGB im Lauf seiner Entwicklung erreichen kann. Dies ist für Sterne geringer ($< 2.1..2.3M_\odot$) und mittlerer Masse ($< 8M_\odot$) möglich.

Auf dem AGB selbst kann man nun zwei Entwicklungsphasen unterscheiden:

1. E-AGB: Kern ist ausgebrannt, d.h. der Helium-Vorrat ist erschöpft. Eine dicke He-Schalenquelle umgibt den Kern, darüber liegt eine inerte Wasserstoff-Hülle. Die Leuchtkraft

des Sterns steigt an.

2. TP-AGB: über dem entarteten C-O–Kern brennen zwei Schalenquellen, während der thermischer Pulse (He-shell Flashes) überwiegt deutlich die Energie der He-Schalenquelle. Mit dieser Phase ist ein weiterer Anstieg der Leuchtkraft verbunden.

Die thermischen Pulse haben gewisse charakteristische Eigenschaften:

- Der entartete Kern ist bereits im wesentlichen ein heißer weißer Zwerg mit $\sim 10^{-2}\,R_{\odot}$. Die Kernmasse M_c in der TP-AGB Phase steigt dabei entsprechend mit der Anfangsmasse und liegt bei $\approx 0.5 \ldots 1.38\ M_{\odot}$.
- In den äußeren Gebieten des AGB-Sterns, die sich über einen großen radialen Bereich von $\approx 100 \ldots 1000 R_{\odot}$ erstrecken, befindet sich in dieser Phase der größte Teil des wasserstoffreichen Materials.
- Die (aktive) Zone effektiver nuklearer Energiefreisetzung ist eine kleine Region zwischen Kern und den äußeren Gebieten in der abwechselnd H- und He-Brennprozesse stattfinden (TP-AGB).

Die äußeren Gebiete eines AGB-Sterns werden auch als *Envelope* bezeichnet. Allerdings wird diese Bedeutung nicht einheitlich verwendet, oft ist auch die zirkumstellare Hülle (ZSH) um den eigentlichen Stern herum gemeint.
In der aktiven Zone laufen in der meisten Zeit ruhige H-Schalenbrennprozesse ab. Dabei ist die Schalenquelle ungefähr einen Kernradius vom eigentlichen Kern entfernt und führt der unter ihr liegenden Schicht Helium (Hauptprodukt des CNO-Zyklus) und Stickstoff zu. Noch eine Schicht tiefer findet man schließlich vorwiegend Helium und die Produkte des zeitweisen Helium-Schalenbrennens.

Zu klären bleibt nur noch, auf welche Art ein Stern seine AGB-Entwicklung beenden kann.

- Theoretisch könnte die AGB-Entwicklung so lange weiterlaufen bis die Dichte im Kern groß genug ist um bei $\log(\rho_{core}) \approx 9.5$ das C-Brennen zu zünden. Der entartete Kern würde zu einer C-Detonation führen, die den Stern in einer Supernova Typ I zerstört.
- Wesentlich häufiger wird jedoch die AGB-Entwicklung weniger dramatisch beendet: durch einen Sternwind und die Bildung eines planetarischen Nebels (PN) geht die äußere Sternhülle verloren. Der ehemalige Sternkern ist im HRD im Gebiet hoher Temperatur und, verglichen zum AGB, geringer Leuchtkraft zu finden. Der AGB-Stern endet so als langsam weiter abkühlender weißer Zwerg.

1.6 AGB–Sterne in der Beobachtung

Nach dem RGB wird ein Stern auf dem AGB zum zweiten Mal in seiner Entwicklung zu einem roten Riesen. Der AGB liegt (wie schon der Name sagt) im HRD asymptotisch am RGB. Die Lebensdauer auf dem RGB ist wesentlich länger als auf dem AGB, daher ist es wahrscheinlicher, daß ein roter Riese ein RGB-Stern ist. Ein AGB-Stern *verrät* sich durch weitere Eigenschaften. Dem AGB lassen sich drei Gruppen von Sternen zuordnen (im folgenden [Habing 1990]).

1. Kohlenstoffreiche Sterne
   Durch den Vergleich der Häufigkeit von Kohlenstoff und Sauerstoff an ihrer Oberfläche kann man AGB-Sternen drei Spektraltypen zuordnen. O-reiche M-Sterne, C-reiche N/R-Sterne sowie S-Sterne mit nahezu gleicher C- bzw. O-Häufigkeit. M-Sterne sind dabei wesentlich häufiger als N/R-Sterne.

   Alle sind rote Riesensterne mit starken Molekülabsorptionsbanden, die auf zirkumstellare Hüllen aus entsprechend C- oder O-reichen Sternatmosphären hindeuten. Anzeichen für einen O-reichen Stern liefert die Beobachtung von OH-Masern: das OH wird mittels interstellarer

Photonen durch Photodissoziation aus H_2O gebildet. In einem C-reichen Stern könnte kein H_2O entstehen, da dort der gesamte Sauerstoff vom häufigeren Kohlenstoff in CO-Molekülen gebunden ist.

Nach der typischen Verteilung der kosmischen Elementhäufigkeiten findet man für Sauerstoff, verglichen mit Kohlenstoff, nahezu die dreifache Atomanzahl. Da aber C-reiche Sterne existieren, muß es einen Prozeß geben, der das normale C/O-Verhältnis umkehren kann. Man nimmt an, daß während eines thermischen Pulses auf dem AGB gerade neu erzeugter Kohlenstoff bis in die obersten Sternschichten aufgemischt wird und so dort das C/O-Verhältnis ändert.

2. Langperiodische Veränderliche (LPV)
   Ein Anteil von $\approx 1\%$ der Riesen des Spektraltyps M sind LPV-Sterne. Ein wichtiges Beispiel sind hier Mira-Sterne. Sie besitzen lange Perioden von 150 ... 500 Tagen und große Variationen von $5 \ldots 6^m$ im sichtbaren. Die mittlere Leuchkraft liegt bei $2 \times 10^3 \ldots 10^4 L_\odot$.

3. OH/IR-Sterne
   Dies sind reine Infrarot-(IR)-Objekte von sehr langer Periode bei denen man OH-Maser Emissionen beobachtet. Sie werden als AGB-Sterne angesehen, die einen so raschen Massenverlust haben, daß die entstandene dicke Hülle den Stern *unsichtbar* macht. Das Licht des Sterns wird von der ZSH absorbiert und dann wieder abgestrahlt. Allerdings strahlt die ZSH die Einstrahlung des Sterns im infraroten ab. Die wirkliche Photosphäre eines solchen Objektes konnte noch nie im visuellen Spektrum gesehen werden. Vermutlich sind diese Sterne weiterentwickelte Mira-Sterne und somit im Kreis der direkten Vorläufer planetarischer Nebel enthalten.

2 Sternmodelle und deren Grundlagen

Dieses Kapitel soll einen groben Einblick in die Grundlagen von Sternmodellen geben. Zur Vereinfachung kann man einen Stern als sphärisch symmetrisch in allen Eigenschaften annehmen. Damit vernachlässigt man bereits Magnetfelder, Gezeiten- und Rotationskräfte deren Behandlung eine Abweichung von der sphärischen Symmetrie bedeuten würde. Die Beschreibung kann auf die zeitliche und radiale Variation von Druck, Temperatur, Radius, Leuchtkraft und Chemie reduziert werden [Kippenhahn *et al.* 1967].
In der Sternentwicklung ändert sich der Radius eines Sterns relativ stark. Die Gesamtmasse bleibt eher fester, daher kann man von der Radiuskoordinate zu Massenschalen als Variable übergehen. Kommt es aber zu Massenverlusten in der Entwicklung, geht dieser *Vorteil* der stabileren Gesamtmasse aus heutiger Sicht wieder schnell verloren.

	$r = 0$		$r = R_*$	
Zentrum	├	────────────	┼	Oberfläche
	$M_r = 0$		$M_r = M_*$	
	$L_r = 0$		P_*, T_{eff}	

In jeder Massenschale müssen die vier Grundgleichungen gelöst werden: Massenerhaltung (9), Bewegungsgleichung (10), Energieerhaltung (11) und Transportgleichung (12).

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi\,\rho\,r^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{G\,M_r}{4\pi\,r^4} - \frac{1}{4\pi\,r^2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon - T\,\frac{\partial S}{\partial t} = \varepsilon_N - \varepsilon_\nu + c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial t} \tag{11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{G\,M_r\,T}{4\pi\,r^4\,P}\cdot\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = -\frac{G\,M_r\,T}{4\pi\,r^4\,P}\cdot\nabla \tag{12}$$

Die Umformung in (11) erfolgte mit der nuklearen Energieerzeugungsrate ε_N unter Einschluß der Neutrinoverluste ε_ν. Für die Entropie S wurde der 1. Hauptsatz der Thermodynamik ausgenutzt. Gleichung (12) beschreibt den Transport der Energie vom Ort ihrer Erzeugung zu dem Ort, an dem sie dann vom Stern abgestrahlt wird. Die erwähnte Erzeugung der Energie ist eher umgangssprachlich zu sehen. Natürlich wurde die Energie nur von einer Form in eine andere umgewandelt, da sie nicht erzeugt werden kann!
Bereits in der Transportgleichung ist eine Komplikation verborgen: der Gradient ∇ hängt vom bestimmenden Mechanismus des Transportes ab.

Strahlung und Wärmeleitung

$$\nabla_{\mathrm{Str}} = \frac{3}{16\pi\,a\,c\,G}\,\frac{\kappa L_r P}{M_r\,T^4} \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{3\kappa}{64\pi^2 a\,c\,r^4}\,\frac{L_r}{T^3} \tag{14}$$

Konvektion

$$\nabla_{\mathrm{Konv}} \quad \text{aus} \quad \text{der Konvektionstheorie}$$

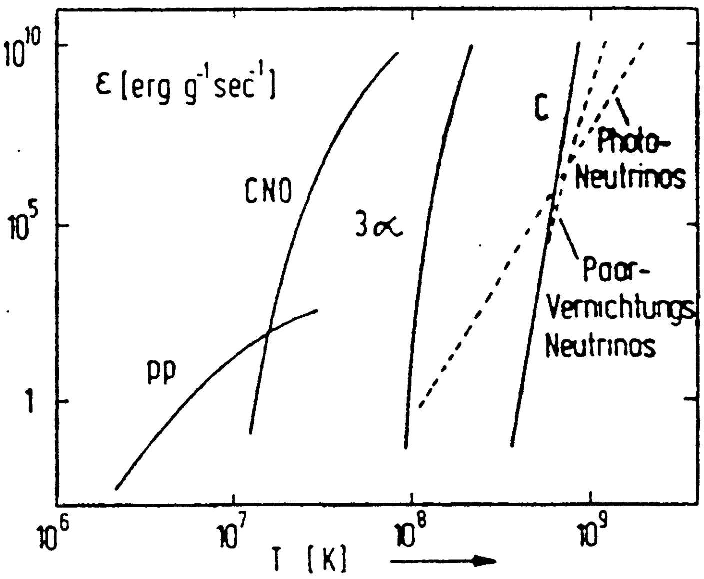
$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{T}{P}\,\frac{d\,P}{d\,M_r}\,\nabla_{\mathrm{Konv}} \tag{15}$$

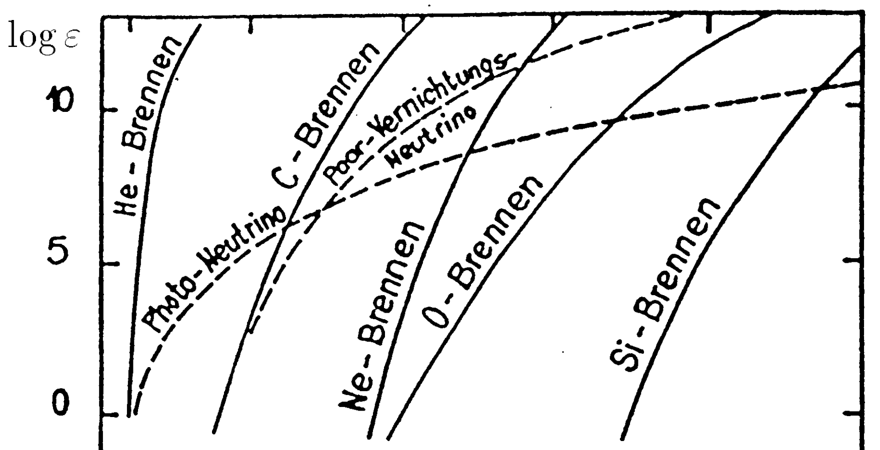
Zur Beschreibung des konvektiven Energietransportes wird oftmals die Mischungswegtheorie (Kapitel 3) mit ihren vereinfachenden Annahmen benutzt.

Zusätzlich müssen auch die Eigenschaften der stellaren Materie als Funktion von Druck, Temperatur und chemischer Zusammensetzung bekannt sein.
Fkt(P, T, X_i) sind: Dichte ρ, Entropie S, Opazität κ, nukleare Reaktionsraten Q_{xy}, adiabatischer Temperaturgradient ∇_{ad} und die Energieerzeugungsrate $\varepsilon = \sum \varepsilon_k$. Letzere setzt sich aus den verschiedenen energieerzeugenden oder -vernichtenden (Neutrinoraten) Reaktionen k zusammen die in Bild 15 und 16 dargestellt sind. Für sehr hohe Temperaturen muß man eine effektive Kühlung durch Neutrinos berücksichtigen. Die Energie des Neutrinos geht nämlich dem Stern sofort verloren, da es ihn praktisch ohne weitere Wechselwirkung mit dessen Materie verläßt.

Bild 15 (rechts): Erzeugte Energie pro Massen- und Zeiteinheit für H-, He- und C-Brennen. Dabei werden für H und He Dichten von $\rho = 10^4 \text{g/cm}^3$ bzw. für Kohlenstoff $\rho = 10^5 \text{g/cm}^3$ angenommen. Die angegebenen Neutrinoraten sind Verluste für nichtentartete Materie bei einer Dichte von $\rho = 10^5 \text{g/cm}^3$ mit $X_{\text{H}} \approx 0$, $\mu_e = 2$ [Scheffler und Elsässer 1990, Abb. IV.24].

Bild 16 (unten): wie Bild 15, aber für höhere Brennprozesse. He-Brennen mit $X_{\text{He}} = 1$ und $\rho = 10^4 \text{g cm}^{-3}$, alle anderen jeweils mit $X_i = 1$ und $\rho = 10^5 \text{g/cm}^3$. Neutrinoraten für $\mu_e = 2, \rho = 10^5 \text{g/cm}^3$ [Lan1965, S.474 Fig.4].





Für die Entwicklung des gewählten Sternmodells müssen auch die Veränderungen der Chemie durch die ablaufenden Brennprozesse berücksichtigt werden.
Gleichung (16) beschreibt die Änderung der chemischen Zusammensetzung für eine Elementsorte (i), dabei ist Q_{xy} die für eine Umwandlung $x \rightarrow y$ einer Masseneinheit m_x nötige bzw. dabei

freiwerdende Energie. Hier gehen die Elementsorte erzeugende ($m \rightarrow i$) und vernichtende ($i \rightarrow k$) Reaktionen ein.

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \underbrace{\sum_m \frac{\varepsilon_{mi}}{Q_{mi}}}_{m \rightarrow i} - \underbrace{\sum_k \frac{\varepsilon_{ik}}{Q_{ik}}}_{i \rightarrow k} \tag{16}$$

Die Änderung der Chemie muß praktisch alle ablaufenden Reaktionen berücksichtigen und führt so zu großen Reaktionsnetzwerken. In konvektiven Gebieten muß die rechte Seite von (16) außerdem über die ganze konvektive Massenschale integriert werden.

In bestimmten Fällen lassen sich die Grundgleichungen (9)-(12) weiter vereinfachen. Abhängig von der Geschwindigkeit der Entwicklung des Sterns kann man für einzelne Gleichungen Gleichgewichtszustände annehmen. Dies ist möglich, weil die charakteristischen Zeitskalen sehr verschieden sind. Die folgenden Näherungen erlauben eine Abschätzung dieser Zeitskalen mit Hilfe der stellaren Parameter des Modells.
Innerhalb der hydrostatischen Zeitskala τ_{hydr} kehrt ein dynamisch stabiler Stern nach einer Störung in das hydrostatische Gleichgewicht zurück. In der meisten Zeit verläuft die Entwicklung eines Sterns langsam verglichen mit dieser Zeitskala. Daher kann man die Zeitableitung in (10) auch in den meisten Fällen vernachlässigen.
Sind die Quellen der Leuchtkraft des Sterns auf seine Gravitationsenergie eingeschränkt, so vollzieht sich die weitere Entwicklung auf der Kelvin-Helmholtz-Zeitskala τ_{KH}.
Die nukleare Zeitskala τ_{n} ist die Zeit, für die ein bestimmter Brennprozeß die Leuchtkraft des Sterns liefern kann. Der Energievorrat E_n ist das Produkt aus der freigesetzten Energie Q pro Masse für einen Brennprozeß, mit der Masse, für die dieser Prozeß auch bei entsprechenden Bedingungen stattfinden kann. Die wichtigste Reaktion ist hier das H-Brennen mit $Q = 6.3 \times 10^{18}$ erg g^{-1}. Für die Abschätzung in (19) wird die gesamte Sternmasse als Brennstoffvorrat angenommen.

$$\tau_{\mathrm{hydr}} \approx \sqrt{\frac{R_*^3}{G\,M_*}} \tag{17}$$

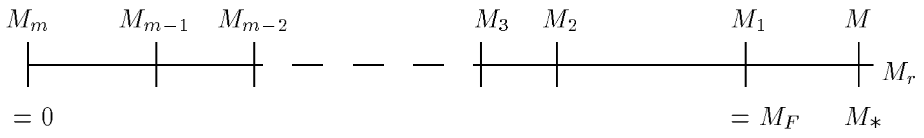
$$\tau_{\mathrm{KH}} \approx \frac{G\,M_*^2}{2\,R_*\,L_*} \tag{18}$$

$$\tau_{\mathrm{n}} := \frac{E_n}{L_*} \approx \frac{Q\,M_*}{L_*} \tag{19}$$

$$\tau_{\mathrm{n}} \gg \tau_{\mathrm{KH}} \gg \tau_{\mathrm{hydr}} \tag{20}$$

Für alle Sterne die ihre Energie aus H- oder He-Brennen beziehen gilt die Ungleichung (20). Hier sind auch die Zeitableitungen in der Energieerhaltungsgleichung (11) vernachlässigbar. Der Stern befindet sich bei einer Entwicklung auf der nuklearen Zeitskala sowohl im mechanischen als auch im thermischen Gleichgewicht. Die chemischen Zeitskalen für den Verbrauch einer Elementsorte entsprechen den nuklearen Zeitskalen der Reaktionen die diese Sorte benötigen.
Die jeweilige Zeitskala der Entwicklung des Sterns kann also im Modell eine erhebliche Vereinfachung mit sich bringen.

Der Einfluß der äußeren Schichten und der Hülle eines Sterns auf die Sternentwicklung kann separat behandelt werden. Dafür wird der Stern an einer Fit-Masse M_F in eine Innen- und eine Außenlösung aufgeteilt.



Die Innenlösung $0 \leq M_r \leq M_F$ beschreibt die innere Struktur. Hier sind die Masse M und die chemische Zusammensetzung X_i als gegeben angesehen. Sind diese beiden Parameter gegeben, existiert für die Hüllenlösung $M_F \leq M_r \leq M_*$ ein Parametersatz von zwei Größen aus R, T_{eff} und L. Da die Beziehung (2) gilt, sind nur zwei dieser Parameter unabhängig. Mit jedem Zeitschritt der Entwicklung ändert sich die chemische Zusammensetzung, entsprechend den in den Massenschalen ablaufenden Reaktionen, nach der allgemeinen Gleichung (16).
In der Außenlösung kann man dann auch eventuelle Massenverluste einbeziehen und die Sternmasse für die Innenlösung ändern.

An die Wahl des Fit-Punktes M_F sind besondere Bedingungen geknüpft. Oberhalb von M_F ist L_r =const, dort wird keine Energie mehr erzeugt. Es finden also weder Brennprozesse noch Radiuskontraktionen über M_F statt. Die chemische Zusammensetzung X_i ändert sich über M_F nicht mehr. Unterhalb von M_F liegen die häufigsten Elemente (H, He) vollständig ionisiert vor, eine mögliche Konvektion ist zumindest näherungsweise adiabatisch. Darüber kann eine nichtadiabatische Konvektion sowie eine variable Ionisation auftreten [Kippenhahn *et al.* 1967].

3 Konvektion und Mischungswegtheorie

3.1 Auftreten konvektiver Bewegungen

Um die Bedingungen zu finden unter denen es zu einer konvektiven Bewegung im Sterninneren kommt, betrachtet man ein kleines Materieelement, dessen innere Temperatur die seiner Umgebung übersteigt [Scheffler und Elsässer 1990]. Das spezifische Gewicht des Elementes ist daher geringer als das der Umgebung. Eine thermische Konvektion setzt ein, die betreffenden Elemente steigen entgegen der Schwerkraftrichtung auf.
Solange das Element nach einem kleinen endlichen Weg weiterhin wärmer als seine Umgebung ist, steigt es weiter auf. Für ein Element das kühler als seine Umgebung ist, kehren sich die Verhältnisse um, die Beschreibung bleibt aber entsprechend. Ein Vergleich der Temperaturgradienten der im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Umgebung und des aufsteigenden Elementes liefert die Bedingung für eine konvektive Bewegung des Elementes:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{El}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{Str}} \tag{21}$$

Verglichen mit der Umgebung ändert sich die Temperatur im Element langsamer mit der Radiuskoordinate r. Verläuft die Konvektion so, daß sich die Elemente adiabatisch bewegen und mit ihrer Umgebung im Druckgleichgewicht sind, ändert sich die Bedingung (21) zu:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{ad}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{Str}} \tag{22}$$

Für die Beschreibung des Sternaufbaus ist diese Form der Darstellung aber eher ungünstig. Um zu einer günstigeren Formulierung zu gelangen, betrachtet man ausgehend vom Ort r die Verschiebung eines Elementes um das Wegstück dr.

Bei der Verschiebung des Elementes von $r \rightarrow r + dr$ ändern sich (Bild 17) Druck und Dichte in Inneren von $P_1', \rho_1' \rightarrow P_2', \rho_2'$ und entsprechend in der Umgebung $P_1, \rho_1 \rightarrow P_2, \rho_2$. Da in jeder Schicht ein Druckgleichgewicht herrschen soll, gilt $P_1 = P_1'$ und $P_2 = P_2'$. Mit zunehmendem r nimmt in der Umgebung der Druck: $P_2 < P_1$.

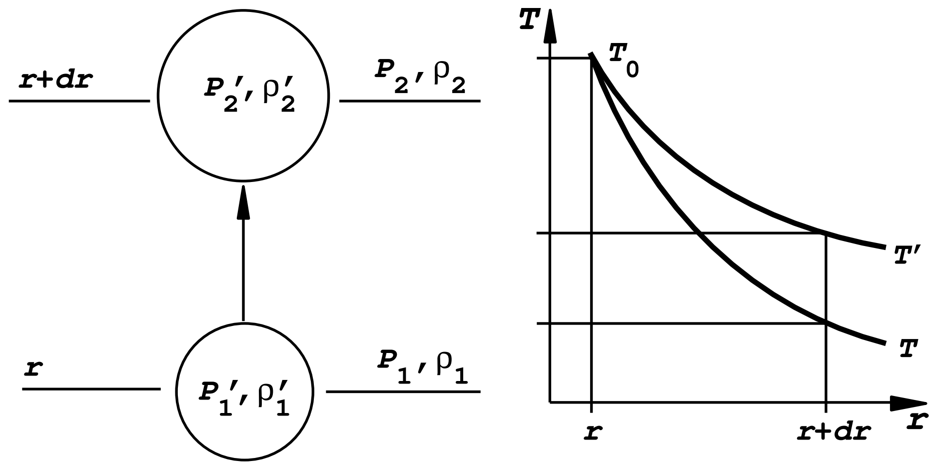


Bild 17: Zuordnung der Größen und Temperaturstruktur, nach [Scheffler und Elsässer 1990].

Die Bedingung für eine konvektive Bewegung läßt sich auch über die Dichten formulieren. Ausgehend von der Adiabatengleichung $\rho' = const \cdot P'^{\,1/\gamma} = const \cdot P^{\,1/\gamma}$ ist die Dichteänderung $d\rho'$ im Element:

$$\rho_2' - \rho_1' = d\rho' = \left(\frac{d\rho'}{dr}\right)_{\text{ad}} dr = const\ \frac{1}{\gamma}\ P^{\frac{1}{\gamma}-1}\ \frac{dP}{dr}\ dr = \frac{1}{\gamma}\ \frac{\rho}{P}\ \frac{dP}{dr}\ dr \tag{23}$$

Aus der idealen Gasgleichung $P = \frac{1}{\mu}\rho\mathcal{R}T$, mit dem mittleren Molekulargewicht μ nach (4) und der allgemeinen Gaskonstanten $\mathcal{R}$, ergibt sich die Dichteänderung $d\rho$ der Umgebung als:

$$\rho_2 - \rho_1 = d\rho = \rho\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dr}\right)\ dr \tag{24}$$

Eine Instabilität gegen Konvektion liegt dann vor wenn $d\rho' < d\rho$ ist. Die Konvektionsbedingung läßt sich dann neu formulieren (Relation (26) gilt für ein ideales Gas).

$$\frac{1}{\gamma}\ \frac{1}{P}\ \frac{dP}{dr} < \frac{1}{\rho}\ \frac{d\rho}{dr} \tag{25}$$

$$-\frac{dT}{dr} > -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\ \frac{dP}{dr} = -\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} \tag{26}$$

Mit dem Temperaturgradienten ∇ bezüglich des Druckes lautet die Bedingung (26) schließlich:

$$\frac{d\ln T}{d\ln P} = \nabla > \nabla_{\text{ad}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \tag{27}$$

Die Konvektionsinstabiliät einer Schicht eines Sterns kann daher auf zwei Arten vergrößert werden: Der Temperaturgradient der Strahlung bezüglich des Druckes ∇_{Str} ist besonders groß oder ∇_{ad} ist durch teilweise Ionisation oder Dissoziation besonders klein.

Die Größenordnung des adiabatischen Temperaturgradienten ∇_{ad} soll die folgende Abschätzung liefern. Man nimmt dafür an, daß ein teilweise ionisiertes, ideales Gas aus nur einem chemischen Element (hier wird Wasserstoff angenommen) vorliegt.
Aus der Zustandgsgleichung $P = (1+x)\,\mathrm{k}\,T\,N$ mit dem Ionisationsgrad $x = N_{ion}/N$ folgt der Temperaturgradient ∇ aus (27) als:

$$\frac{1}{\nabla} = 1 + \frac{d\ln P}{d\ln T} = \frac{T}{1+x}\ \frac{dx}{dT} + \frac{T}{N}\ \frac{dN}{dT} \tag{28}$$

Gleichung (29) ist die innere Energie pro Einheitsmasse. Der erste Term entspricht der kinetischen Energie aller Teilchen, die Ionisationsenergie χ wäre bei einer Rekombination verfügbar.

$$u = \frac{3}{2}\,\mathrm{k}\,T\,\frac{1+x}{m_H} + \chi\,\frac{x}{m_H} \tag{29}$$

Da die Zustandsänderung adiabatisch verlaufen soll, gilt für die innere Energie pro Einheitsmasse $du + PdV = 0$. Dabei ist das spezifische Volumen $V = 1/\rho = 1/(N \cdot m_H)$. Dann gilt für den letzten Term der rechten Seite von (28) die Umformung (30).

$$\frac{1}{N}\ \frac{dN}{dT} = -N \cdot m_H\ \frac{dV}{dT} = \frac{N \cdot m_H}{P}\ \frac{du}{dT} = \frac{m_H}{(1+x)\,\mathrm{k}\,T}\ \frac{du}{dT} \tag{30}$$

Aus der Saha-Gleichung erhält man Werte für den Ionisationsgrad x als Funktion von T und P. Mit dx/dT ergibt sich schließlich der adiabatische Temperaturgradient ∇_{ad} nach (31).

$$\frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} = \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi}{\mathrm{k}\,T}\right)\frac{T}{1+x}\ \frac{dx}{dT} \tag{31}$$

Damit erhält man die folgenden Größenordnungen für ein 1-atomiges ideales Gas:

$$\begin{array}{lll} \text{1-atomig neutral} & x = 0 & \\ \text{vollständig ionisiert} & x = 1 & \end{array} \Bigg\} \quad \nabla_{\mathrm{ad}} = 0.4 \qquad \text{und} \qquad \gamma = \frac{1}{1 - \nabla_{\mathrm{ad}}} = \frac{5}{3}$$

$$\text{teilweise ionisiert} \qquad \frac{dx}{dT} > 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\mathrm{ad}} < 0.4 \qquad \begin{array}{l} \text{Konvektionsbedingung} \\ \text{ist leichter erfüllbar} \end{array}$$

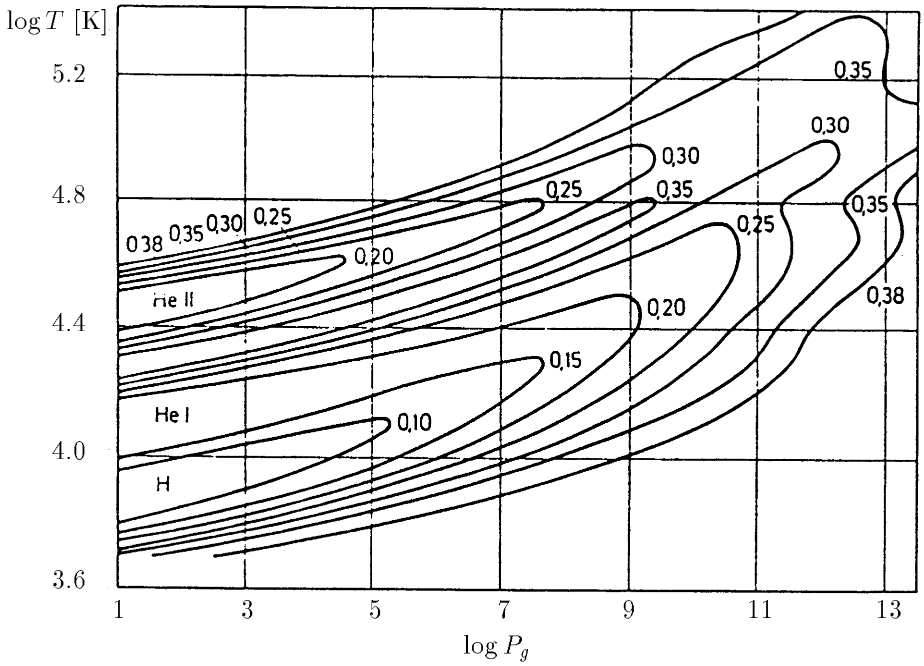


Bild 18: Liniendiagramm $\nabla_{\mathrm{ad}} = const$ für Sternmaterie der Population I. Werte von $\nabla_{\mathrm{ad}} < 0.4$ sind eine Folge der Ionisation von Wasserstoff bzw. der ein- oder zweifachen Ionisation von Helium. Diese beiden Elemente haben einen wesentlichen Einfluß, da sie in einem Stern am häufigsten sind. Bei festgehaltenem Druck wird für tiefe bzw. hohe Temperaturen $\nabla_{\mathrm{ad}} \approx 0.4$ [Lan1965, Fig.2 S.434].

3.2 Mischungswegtheorie

Die Konvektion in einem Modell darzustellen ist keine einfache Aufgabe. In einer realen Konvektionszone findet man eine Vielzahl konvektiver Elemente mit verschiedensten Größen, Formen und Geschwindigkeiten. Die Lebensdauern einzelner Elemente dürften ebenfalls sehr variabel sein.
Eine wesentliche Vereinfachung dieses Problems liefert die Mischungswegtheorie nach Böhm-Vitense, die mit einer Gruppe *mittlerer konvektiver Elemente* arbeitet (die folgende Darstellung orientiert sich an [Cox und Giuli 1968]. Dabei werden die folgenden sechs Annahmen gemacht.

1. Jedes konvektive Element bewegt sich über eine mittlere freie Weglänge, diese ist gleich der Mischungsweglänge ℓ.

2. Hat das betrachtete Element diese Entfernung zurückgelegt, so geht seine Identität verloren; es vermischt sich dann mit seiner Umgebung.

3. Die genaue Form der Elemente bleibt undefiniert. Jedoch nimmt man für alle Elemente die gleichen charakteristischen Dimensionen in allen Richtungen an: die Mischungsweglänge ℓ.

4. Die Mischungsweglänge ist im allgemeinen eine Funktion des Radius, an dem das konvektive Element betrachtet wird.

5. Bei einem Radius r bewegen sich alle konvektiven Elemtente mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$. Die Mittelung erfolgt bezüglich aller konvektiven Elemente bei diesem Radius.

6. Die mittlere Lebensdauer eines Elementes ergibt sich damit als $t = \ell / \bar{v}$

Diese Annahmen beinhalten bereits die wesentlichen Probleme der Mischungswegtheorie. Sie stellt eine extreme Vereinfachung der Realität des physikalischen Prozesses der Konvektion dar. In der Mischungsweglänge liegt eine prinzipielle Unsicherheit, so daß die Theorie im wesentlichen nur ein qualitativ sinnvolles Bild des konvektiven Energietransportes bieten kann.
Mit dieser Theorie gewonnene Sternmodelle zeigten jedoch keine offensichtlichen Widersprüche zu den Beobachtungen, daher findet die Beschreibung der Konvektion durch die Mischungswegtheorie eine breite Verwendung.

In einer konvektiv instabilen Region eines Sterns kann man durch die Mischungswegtheorie Aussagen über mittlere Werte physikalischer Größen machen.
Bei einem gegebenen Radius r herrscht ein vollständiges Druckgleichgewicht. Dieses bleibt auch auf dem ganzen Mischungsweg erhalten. Für jede Schicht kann man eine mittlere Temperatur $T(r)$ definieren. Volumenelemente mit dieser mittleren Temperatur werden als stationär in r angesehen. In jedem Element, dessen Temperatur diesen lokalen Mittelwert übersteigt, muß durch das geltende Druckgleichgewicht die Dichte sinken. Das Element entwickelt also eine Neigung gegenüber der stationären Materie aufzusteigen. Die Überschußwärme soll es dann weiter *oben* wieder verlieren, nachdem es den Mischungsweg zurückgelegt hat. Elemente die kälter als ihre Umgebung sind, würden dagegen absinken um schließlich von der Umgebung erwärmt zu werden und so aus tieferen Regionen Wärme absorbieren. Das Resultat der Konvektion ist der Transport von Wärmeenergie zu größeren Radien r.
Die Materie an jedem Radius r ist im hydrostatischen Gleichgewicht. Daher ist bei einem r für jeden Zeitpunkt die Masse aufsteigender Elemente gleich der Masse der absinkenden.
Die Geschwindigkeit der Konvektion soll unter der lokalen Schallgeschwindigkeit liegen. Das bedeutet, daß der turbulente Druck aus dem Impulsübertrag der sich bewegenden Massen vernachlässigt wird. Überschreitet die Konvektion die lokale Schallgeschwindigkeit, werden grundlegende Annahmen der Mischungswegtheorie verletzt, so daß sie in dieser Form nicht mehr richtig anwendbar ist. Die Beschreibung der turbulenten Bewegungen die dann wichtig werden, ist auch noch nicht geklärt.

Im konvektiven Gleichgewicht wird der Energietransport von Strahlung und Konvektion gemeinsam durchgeführt. Der gesamte Strahlungsfluß ist $\Phi = \Phi_{Str} + \Phi_{Konv}$ oder

$$\Phi = -\frac{4ac}{3}\,\frac{T^3}{\kappa\,\rho}\frac{dT}{dr} = -\frac{4ac}{3}\,\frac{T^4}{\kappa\,\rho}\,\frac{d\ln P}{dr}\,\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right) = \frac{4ac}{3}\,\frac{T^4}{\kappa\,\rho}\,\frac{1}{H_p}\nabla = \frac{4ac}{3}\,\frac{T^4 g}{\kappa\,P}\nabla \tag{32}$$

Hier gehen der Gesamtdruck von Gas und Strahlung P, die Dichte ρ und die Schwerebeschleunigung $g = G\,M_r/r^2$ bei r ein. Dichte und Druck sind über die gesamte Kugelschale bei r gemittelt. Der Temperaturgradient ∇ stammt aus (27), H_p ist die Druckskalenhöhe (33) die für eine wesentliche Druckänderung mit der Entfernung steht. Für eine mit r konstante Skalenhöhe H_p ist $P \sim \exp\{-\Delta r/H_p\}$, d.h. H_p steht für die Strecke auf der sich der Druck um $e^{\pm 1}$ verändert. Der zweite Teil der Gleichung (33) gilt im hydrostatischen Gleichgewicht.

$$\frac{1}{H_p} = -\frac{d\ln P}{dr} = -\frac{dP}{dr\;P} = \frac{g\rho}{P} \tag{33}$$

In einer Konvektionszone wird ein Teil der Energie durch Strahlung transportiert. Ausgehend von der Diffusionsnäherung kann man einen für die Beschreibung der Konvektion fiktiven Gradienten ∇_{Str} (35) definieren, der einem reinen Energietransport durch Strahlung entsprechen würde. $\Phi_{rad}(r)$ ist der über alle Materie bei r gemittelte Strahlungsfluß.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{3}\mathrm{a}\,T^4\right) = -\frac{1}{c}\,\kappa\,\rho\,\Phi_{rad}(r) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{rad} = -\frac{4ac}{3}\,\frac{T^3}{\kappa\,\rho}\,\frac{dT}{dr} \tag{34}$$

$$\Phi = \Phi_{rad} = \frac{4ac}{3}\,\frac{T^4}{\kappa\,\rho}\,\frac{1}{H_p}\,\nabla_{\mathrm{Str}} \tag{35}$$

Der Gradient ∇_{u} beschreibt den Mittelwert der Umgebung eines konvektiven Elementes bei einem Radius r, ∇_{El} ist der entsprechende Gradient des steigenden bzw. fallenden Elementes.
Zusammen mit dem adiabatischen Gradienten ∇_{ad} (31) sind die vier bestimmenden Temperatur-Gradienten bezüglich des Druckes definiert. Für diese vier Größen gilt die Ungleichung:

$$\nabla_{\mathrm{ad}} < \nabla_{\mathrm{El}} < \nabla_{\mathrm{u}} < \nabla_{\mathrm{Str}} \tag{36}$$

Findet im konvektiven Gebiet noch eine nukleare Energieerzeugung statt, kann $\nabla_{\mathrm{ad}} > \nabla_{\mathrm{El}}$ sein. Die Instabiltät gegenüber der Konvektion wäre dann noch größer. Ansonsten würden aber die Verhältnisse aus (36) bestehen bleiben. Der Gradient ∇_{El} hängt davon ab, mit welcher Rate das Element Energie mit seiner Umgebung austauscht. Tief im Sterninneren ist der adiabatische Gradient eine gute Näherung für den des steigenden bzw. fallenden Elementes.

Die Betrachtung eines mittleren Konvektionselementes führt zu einem Ausdruck für den konvektiven Fluß Φ_{konv}. Der Weg eines mittleren Elementes beginnt bei einem Radius r, der anfängliche Temperaturunterschied soll vernachlässigbar sein. Das Element behält beim Aufstieg über die Entfernung Δr seine Identität bei. Pro Volumeneinheit ist der Wärmeüberschuß des Elementes $c_p\rho\Delta T$. Dabei ist ΔT (37) der mittlere Temperatur-Exzess des Elementes gegenüber der Umgebung nach dem Weg Δr.

$$\Delta T(\Delta r) = T_{\mathrm{El}}\,(r+\Delta r) - T_{\mathrm{u}}\,(r+\Delta r) = \Delta r\cdot\left[\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\mathrm{El}} - \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\mathrm{u}}\right] \equiv \Delta r\;\Delta(\nabla T) \tag{37}$$

Die erste Umformung von (37) ist eine Taylorentwicklung mit Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in Δr als der ersten. Diese Linearisierung stellt eine gute Beschreibung dar, solange sich die Temperatur T über der Entfernung Δr nicht zu sehr ändert (wie zum Beispiel in Wasserstoff-Ionisationszonen). Nutzt man zusätzlich für den gesamten Weg Δr die Näherung $T_{\mathrm{u}} \approx T_{\mathrm{El}}$ so findet man:

$$
\begin{aligned}
\Delta T(\Delta r) &= \Delta r\, T \left[\left(\frac{d\ln T}{dr}\right)_{\mathrm{El}} - \left(\frac{d\ln T}{dr}\right)_{\mathrm{u}} \right] \\
&= -\frac{d\ln P}{dr}\, \Delta r\, T \left[\nabla_{\mathrm{u}} - \nabla_{\mathrm{El}}\right] \;=\; \Delta r \cdot \frac{T}{H_p} \left(\nabla_{\mathrm{u}} - \nabla_{\mathrm{El}}\right)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Der konvektive Gesamtfluß wird nach (39) mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p pro Masse, der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ und ΔT nach (37,38) definiert. Die Größen $\rho, \bar{v}, c_p$ und $\Delta(\nabla T)$ sind in dieser Rechnung als deren Mittelwerte über die gesamte Fläche beim Radius r zu sehen.

$$
\Phi_{Konv} = c_p\, \rho\, \Delta T \cdot \bar{v} = c_p\, \rho\, \Delta r\, \Delta(\nabla T) \cdot \bar{v} \tag{39}
$$

Die Mittelung über alle Wege Δr führt zur Mischungsweglänge und damit auch zu dem über ℓ gemittelten konvektiven Fluß. Unter der Annahme, daß jeweils die Hälfte aller Elemente steigen bzw. absinken, folgt der Faktor $\frac{1}{2}$ in (40). Dieser Faktor ist eher als Veranschaulichung zu sehen, denn als sichere Erkenntnis. Er ist im Rahmen der Mischungswegtheorie nur ein willkürlicher Faktor der Größenordnung eins.

$$
\Phi_{Konv} = \frac{1}{2}\, \ell\, c_p\, \rho\, \Delta(\nabla T) \cdot \bar{v} = \frac{1}{2}\, \ell\, c_p\, \rho\, \frac{T}{H_p} \left(\nabla_{\mathrm{u}} - \nabla_{\mathrm{El}}\right) \cdot \bar{v} \tag{40}
$$

Aus der Lösung der Bewegungsgleichung (10) für die konvektiven Elemente erhält man einen Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$. Im Gleichgewicht (Index 0) ist $\ddot{r} = 0$. Mit der Überschußdichte $\Delta\rho$ des Materieelementes gegenüber seiner Umgebung an einem bestimmten Radius r ist die Dichte $\quad \rho = \rho_0 + \Delta\rho$.

$$
\ddot{r} = -\frac{GM_r}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -g(r) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \tag{41}
$$

In 1.Ordnung liefert die Entwicklung von ρ nach $\Delta\rho/\rho_0$ einen Ausdruck für die resultierende Nettokraft f_B (43) pro Volumen.

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} &= -g_0 - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_0 \cdot \left[1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right] \\
&= \underbrace{-g_0 - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_0}_{=0} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_0}_{-g_0} = -g_0\, \frac{\Delta\rho}{\rho_0}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Die resultierende Kraft ist die Differenz zwischen Auftrieb und Schwerkraft die auf das konvektive Element wirken. Auf dem Weg $r \ldots r+\Delta r$ steigt die Überschußdichte linear an: $\Delta\rho \approx 0 \ldots \Delta\rho(\Delta r)$. Dabei vernachlässigt man die Variation in $g(r)$ während das Element über den Weg Δr nach oben beschleunigt wird.

$$
f_B(\Delta r) = -g\Delta\rho(\Delta r) \tag{43}
$$

Durch Integration über den Weg Δr erhält man aus (43) die nötige Arbeit pro Einheitsvolumen:

$$
W(\Delta r) = \int_0^{\Delta r} f_B(\Delta\tilde{r})\, d(\Delta\tilde{r}) = -\frac{1}{2}\, g\Delta\rho(\Delta r) \cdot \Delta r \tag{44}
$$

Eine Mittelung über alle möglichen Δr führt wieder zur Mischungsweglänge ℓ. Um eine numerische Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Böhm-Vitense zu erreichen, führen Cox & Giuli außerdem einen weiteren Faktor $\frac{1}{4}$ ein.

$$\overline{W(\ell)} = -\frac{1}{8}\, g\Delta\rho(\ell)\cdot\ell \tag{45}$$

Diese mittlere Arbeit pro Einheitsvolumen wird in kinetische Energie des betrachteten Elements umgesetzt. Unter völliger Vernachlässigung aller dissipativer Kräfte wie Abbremsung, Wärmeverluste oder weiterer Übertrag kinetischer Energie des Elementes auf seine Umgebung durch das *wegschieben* der Materie auf dem Weg ℓ, sowie der schon erwähnten Vernachlässigung der Änderung des Gravitationspotentials über dem Weg, würde die gesamte mittlere Arbeit in die kinetische Energie des sich bewegenden Elementes umgesetzt werden.
Die großen Volumina der Elemente haben zur Folge, daß die wirkenden Auftriebskräfte, verglichen mit den bremsenden viskosen Kräften, sehr groß sind. Den größten Anteil der Bremsung des Aufstiegs macht noch das Beiseite-Schieben der umgebenden stationären oder zumindest langsameren Materie. Daher wird hier die Annahme gemacht, daß nur die Hälfte der gesamten mittleren Arbeit pro Volumeneinheit in kinetische Energie (pro Volumeneinheit) des sich bewegenden Elementes umgesetzt wird.

$$\frac{1}{2}\,\overline{W(\ell)} = \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{v}^2 = -\frac{1}{8}\, g\, \frac{\Delta\rho(\ell)}{\rho}\cdot\ell \tag{46}$$

Gleichung (46) ist die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit für den Radius r bei dem die Mischungsweglänge ℓ ist. Diese Geschwindigkeit kommt auch in der Gleichung des konvektiven Flusses (40) vor.
Mit Hilfe der Zustandsgleichung $\rho = \rho(\mu, P, T)$ läßt sich ein Zusammenhang zwischen $\Delta\rho$ und ΔT definieren. Für einen gegebenen Radius r soll ein Druckgleichgewicht herrschen, d.h. der Druck P ist dort konstant.

$$\begin{aligned}
\Delta\ln\rho &= \frac{d\ln\rho}{d\ln T}\cdot\Delta\ln T \\
&= \left[\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right)_{\mu,\,P} + \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\mu}\right)_{P,\,T}\cdot\left(\frac{\partial\ln\mu}{\partial\ln T}\right)_{P}\right]\cdot\Delta\ln T \equiv -Q\cdot\Delta\ln T
\end{aligned} \tag{47}$$

Nach dem Mischungsweg ℓ haben Dichte und Temperatur die Überschußwerte $\Delta\rho(\ell)$ und $\Delta T(\ell)$.

$$\frac{\Delta\rho(\ell)}{\rho} = -Q\,\frac{\Delta T(\ell)}{T} \tag{48}$$

Im folgenden macht man die Annahme $\Delta T(r) = 0$, die eigentlich bedeuten würde, daß keine Konvektion stattfindet (sie benötigt als Auslöser genau eine solche anfängliche Temperaturdifferenz).

$$\bar{v}^2 = \frac{g\,Q}{8}\,\frac{\Delta T(\ell)}{T}\cdot\ell = \frac{g\,Q}{8}\,\frac{\Delta(\nabla T)}{T}\cdot\ell^2 = \frac{g\,Q}{8}\,\frac{\ell^2}{H_p}\left(\nabla_{\mathrm{u}} - \nabla_{\mathrm{El}}\right) \tag{49}$$

Mit der mittleren Konvektionsgeschwindigkeit $\bar{v}$ nach (49) ist der konvektive Fluß mit jeweils über die Mischungsweglänge ℓ gemittelten Größen:

$$\Phi_{konv} = \sqrt{\frac{g\,Q}{32}}\; c_p\,\rho\,T\;\ell^2\;H_p^{-3/2}\;\left(\nabla_{\mathrm{u}} - \nabla_{\mathrm{El}}\right)^{3/2}. \tag{50}$$

Im allgemeinen gilt $Q \simeq 1$. Falls das mittlere Molekulargewicht μ konstant ist und die Zustandsgleichung eines idealen Gases gilt, ist $Q = 1$.
Überschreitet die Geschwindigkeit der Konvektion die lokale Schallgeschwindigkeit v_s, ist die Annahme eines Druckgleichgewichtes zwischen Element und Umgebung nicht mehr gewährleistet. Das Druckgleichgewicht im Element stellt sich auf einer Zeitskala ℓ/v_s ein, die typische Lebensdauer eines Elementes ist $\ell/\bar{v}$. Druckgleichgewicht im Element kann man also nur dann annehmen,

wenn $\bar{v} < v_s$ ist. Nach Cox & Giuli hat eine Konvektion mit Überschallgeschwindigkeit die Ausbildung einer Stoßfront zur Folge. In der Energiedissipation durch die Ausbildung einer Stoßfront sehen sie eine Möglichkeit, die Konvektion auf den Unterschallbereich zu begrenzen und damit die Gültigkeit der gemachten Betrachtung zu gewährleisten.

Der gesamte Strahlungsfluß nach (32) läßt sich jetzt durch die Temperaturgradienten bezüglich des Druckes für die Umgebung und für das konvektive Element ausdrücken.

$$\Phi = \Phi_{Str} + \Phi_{Konv} = \frac{4\mathrm{ac}T^4}{3\kappa\rho H_p}\nabla\mathrm{u} + \sqrt{\frac{g\,Q}{32}}\;c_p\,\rho\,T\;\ell^2\;H_p^{-3/2}\;\left(\nabla\mathrm{u} - \nabla_{\mathrm{El}}\right)^{3/2} \tag{51}$$

Die Effektivität der Konvektion definiert deren Anteil am Energietransport in einer konvektionsinstabilen Sternschicht.
Während seiner Lebensdauer hat ein konvektives Element Wärmeverluste durch Abstrahlung an seine Umgebung. Findet im Element noch nukleare Energieerzeugung statt, kommt es zusätzlich zu Wärmegewinnen. Der Wärmeaustausch findet dabei relativ zur mittleren Umgebung statt. Im Mittel befinden sich für einen bestimmten Radius r gleichviele kühle bzw. heiße Elemente auf der Kugelschale. Der Wärmeaustausch kann die Effektivität der Konvektion verändern und beeinflußt den Nettostrahlungsfluß daher nur indirekt.
Für die weitere Abschätzung werden die Elemente als optisch dick angenommen. Optisch dünne Elemente existieren nur in oder unmittelbar über der Photosphäre. Da dort aber die Konvektion ineffektiv ist, werden sie nicht weiter betrachtet.
Die aus dem Element nach außen fließende Energie pro Fläche und Zeit ist entsprechend Gleichung (34) durch die folgende Näherung gegeben.

$$\Phi_a \approx \frac{4ac}{3}\;\frac{T^3}{\kappa\rho}\;\frac{\Delta T}{\ell/2} \tag{52}$$

Dabei ist ΔT die über die Lebensdauer gemittelte Temperaturdifferenz zwischen Zentrum und Oberfläche des Elementes ($\approx \ell/2$). Für die optisch dicken Elemente gilt $\kappa\,\rho\,\ell/2 \gg 1$. Mit der Oberfläche A und der Lebensdauer $\ell/\bar{v}$ gelangt man zu der in der Lebensdauer abgestrahlten Energie.

$$\Phi_a \cdot \frac{\ell}{\bar{v}}\,A = \frac{4ac}{3}\;\frac{T^3}{\kappa\rho}\;\frac{\Delta T}{\ell/2}\;\frac{\ell}{\bar{v}}\;A \tag{53}$$

Der Überschußwärmeinhalt des konvektiven Elementes bezüglich der Umgebung kurz vor seiner Auflösung läßt sich durch das Volumen V des Elementes und den Temperaturüberschuß ΔT_{max} am Ende des Mischungsweges nach (54) darstellen.

$$c_p\rho\,\Delta T_{max}\;V \tag{54}$$

Durch das Verhältnis von Gleichung (54) und (53) wird die Effektivität der Konvektion Γ definiert. Das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche des konvektiven Elementes ist für eine Kugel mit dem Durchmesser ℓ, einen Würfel der Seitenlänge ℓ und einen Zylinder mit Durchmesser und Höhe ℓ jeweils $V/A = \ell/6$. Um auch hier wieder numerisch mit Böhm-Vitense übereinzustimmen wird im folgenden angenommen, daß $\Delta T_{max} = 2\Delta T$ und $V/A = (2/9)\ell$ gilt ($\bar{v}$ nach (49)).

$$\Gamma = \frac{3}{4ac}\;\frac{c_p\kappa\rho^2\bar{v}}{T^3}\;\frac{V}{A} = \frac{c_p}{6ac}\;\frac{\kappa\rho^2\bar{v}\ell}{T^3} = \frac{c_p\kappa\rho^2}{12acT^3}\sqrt{\frac{gQ}{2}}\;\ell^2\;H_p^{-1/2}\;\left(\nabla\mathrm{u} - \nabla_{\mathrm{El}}\right)^{1/2} \tag{55}$$

In dieser Definition der Effektivität werden nur die Energieverluste durch Abstrahlung des Elementes betrachtet. Im Element kann es aber auch zu einer nuklearen Energieerzeugung kommen. Mit der Energieerzeugungsrate pro Masse ϵ ist die in der Lebensdauer des Elementes erzeugte

Überschußenergie durch Gleichung (56) gegeben. Dort geht die durch den Dichte- und Temperaturüberschuß des Elementes verursachte *Überschuß*energieerzeugungsrate $\Delta\epsilon$ ein. In der ersten Umformung wird der Zusammenhang (47) zwischen $\Delta\rho$ und ΔT ausgenutzt.

$$\Delta\epsilon(\Delta T, \Delta\rho)\,\rho\, V\,\frac{\ell}{\bar{v}} = \left(\left(\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial \ln T}\right)_\rho - Q\left(\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial \ln\rho}\right)_T\right)\frac{\Delta T}{T}\,\epsilon\rho V\,\frac{\ell}{\bar{v}} = (\nu - Q\,\lambda)\,\frac{\Delta T}{T}\,\epsilon\rho V\,\frac{\ell}{\bar{v}} \tag{56}$$

Die Zahl η ist dann das Verhältnis zwischen der im Element mehr (als in der Umgebung) erzeugten Energie nach (56) und der von ihm abgestrahlten Energie nach (53).

$$\eta = \frac{1}{16ac}\,\frac{(\nu - Q\lambda)\epsilon\kappa\rho^2\ell^2}{T^4} \tag{57}$$

In diesem Fall wurde (nur für (57)) $V/A = \ell/6$ angenommen. Für die Effektivität der Konvektion gilt dann:

$$\frac{\Gamma}{1-\eta} = \frac{\nabla_{\mathrm{u}} - \nabla_{\mathrm{El}}}{\nabla_{\mathrm{El}} - \nabla_{\mathrm{ad}}}\,. \tag{58}$$

Mit $\epsilon = 0$ im konvektiven Element entspricht (58) der Gleichung (55). Mit nuklearer Energieerzeugung ist $\epsilon > 0$. Gleichung (58) berücksichtigt auch Energieverluste durch Neutrions. Übersteigen diese die nukleare Energieerzeugung im Element, wird $\epsilon < 0$.

$$\frac{\Phi_{konv}}{\Phi} = \frac{\Phi - \Phi_{Str}}{\Phi}\begin{cases} = \dfrac{\nabla_{\mathrm{Str}} - \nabla_{\mathrm{u}}}{\nabla_{\mathrm{Str}}} & \to 0 \quad \text{für}\nabla_{\mathrm{u}} \to \nabla_{\mathrm{Str}} \qquad \Gamma \to 0 \\ \simeq \dfrac{\nabla_{\mathrm{Str}} - \nabla_{\mathrm{ad}}}{\nabla_{\mathrm{Str}}} & \begin{array}{l} \to 1 \quad \text{für}\nabla_{\mathrm{Str}} \gg \nabla_{\mathrm{ad}} \\ \to 0 \quad \text{für}\nabla_{\mathrm{Str}} \to \nabla_{\mathrm{ad}} \end{array} \qquad \Gamma \to \infty \end{cases} \tag{59}$$

Wird die Effektivität klein tritt zwar Konvektion auf, aber sie vermag nur einen kleinen Teil des gesamten Flusses zu tragen.
Eine hohe Effizienz der Konvektion bedeutet dagegen nicht automatisch auch einen hohen Anteil am Energiefluß. Einen geringen Anteil am Fluß bei großer Effizienz findet man tief im Sterninneren nahe an der Grenze eines Gebietes, das sich im Strahlungsgleichgewicht befindet. Dort muß, abgesehen von einem möglichen Überschießen (*overshoot*) jeglicher konvektiver Energietransfer zum Stillstand kommen.
Die folgende Tabelle soll einen Eindruck vermitteln, in welchen Wertebereichen die erwähnten Parameter typischerweise zu finden sind.

Betrachtete Größe	Typische Werte	in	tief im Stern	Außen-schichten
Gradientendifferenz	$\log\Delta(\nabla T)$	[K/cm]	$-12\ldots-10$	$-5\ldots-4$
Element vs. Umgebung	$\Delta T = \Delta(\nabla T)\cdot\ell$	[K]	$0.01\ldots1$	$100\ldots1000$
mittlere Geschwindigkeit	$\bar{v}$	[km/s]	$0.001\ldots0.1$	$0.5\ldots15$
Lebensdauer	$t = \ell/v$	—	$1\ldots100$ d	$1\ldots100$ m
Effektivität der Konvektion	$\log\Gamma$	—	$6\ldots9$	$-4\ldots2$
Geschwindigkeitsverhältnis	$\log\left(\frac{\bar{v}}{v_s}\right)$	—	$-6\ldots-4$	$-1\ldots0$

4 Sternentwicklung mit Massenverlusten

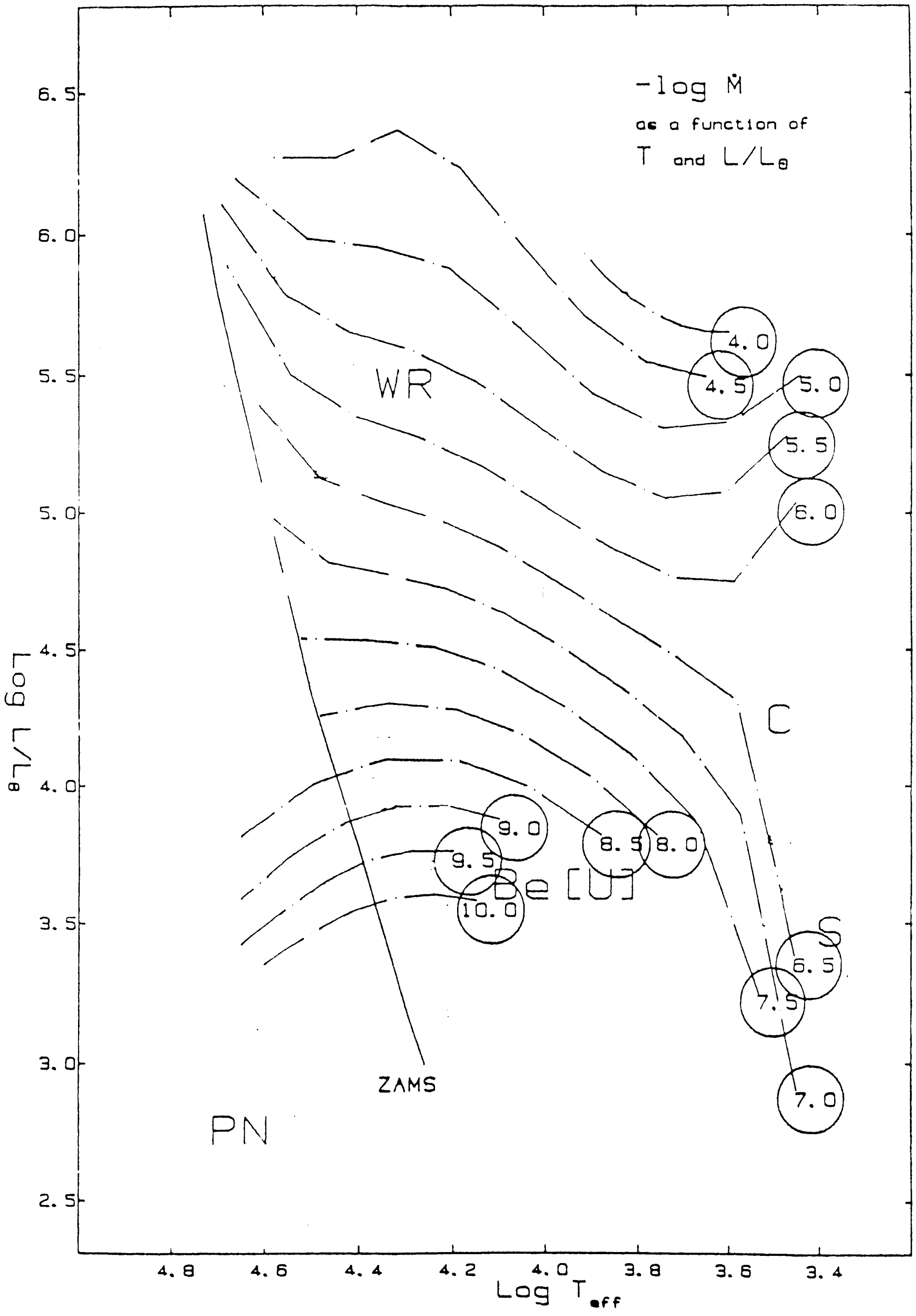


Bild 19: HRD mit Linien gleicher Massenverlustraten ($-\log \dot{M}$ in $[M_\odot/\mathrm{yr}]$) [deJager *et al.* 1988].

4.1 Signifikanz von Massenverlusten

Der Weg eines Sterns von der Hauptreihe zu späten Entwicklungsstadien wird von Massenverlusten durch stellare Winde begleitet. Diese Winde sind der wesentliche Eintrag von Material in das interstellare Medium. Der weitaus größte Teil der von Sternen verlorenen Masse entstammt kontinuierlichen Winden [Lafon und Berruyer 1991]. Riesen-Sterne später Typen sind hier die hauptsächliche Quelle.

Hält eine hohe Massenverlustrate über eine entsprechend lange Zeit an, hat dies dramatische Folgen für den Stern und seine weitere Entwicklung. Im HRD findet man diese Situation bei den Sternen vor, die auf dem AGB liegen. Nahezu 90% der gesamten verlorenen Masse stammen aus kühlen AGB-Sternen mit hoher Leuchtkraft [Lafon und Berruyer 1991].

Die allgemein beobachteten Massenverlustraten liegen in einem weiten Bereich vom Sonnenwind mit $\sim 10^{-14} M_{\odot}$ yr^{-1} bis zu Sternen auf dem AGB mit $\sim 10^{-4 \dots -5} M_{\odot}$ yr^{-1}. Die größten Massenverlustraten fand man für OH/IR-Sterne die sich gerade in der Phase des Abwerfens ihrer äußersten Schichten befinden. Sie sind eine Zwischenstufe auf dem Weg vom AGB zum Endstadium als weißer Zwerg.

Ein Indiz für den wichtigen Einfluß der Massenverluste auf die Entwicklung ist die beobachtete Supernova Häufigkeit. Der Kern eines AGB-Sterns setzt sich im wesentlichen aus Kohlenstoff und Sauerstoff zusammen. Im Lauf der Entwicklung fügen die Prozesse des He-Brennens dem Kern weitere Masse hinzu. Wenn der Kern dabei die Chandrasekharsche Grenzmasse von $1.4 M_{\odot}$ erreichen könnte, würde er explodieren und dabei einer Supernova vergleichbare Energiemengen freisetzen [Iben 1991]. Könnten Sterne mittlerer Masse ihre Entwicklung bis zu diesem Zeitpunkt fortsetzen, müßte man die $20 \dots 40$fache Anzahl von Supernova-Ereignissen beobachten als dies tatsächlich der Fall ist.

Der Massenverlust durch einen kontinuierlichen Wind erlaubt einem Stern seine äußeren wasserstoffreichen Schichten zu entziehen. Ohne die darüberliegenden Schichten kommt auch das He-Schalenbrennen zum erliegen, bevor die Kernmasse zu groß werden kann.

Beobachtungen zeigen, wie bedeutend diese Art von Massenverlusten für die Sternentwicklung ist. [deJager *et al.* 1988] stellten eine Vielzahl von Beobachtungsergebnissen in einem HRD (Bild 19) zusammmen. In den Linien gleicher Massenverlustraten sind die Bereiche einiger bereits erwähnter Sterntypen markiert: Wolf-Rayet-Sterne (WR), Be-Typ, C- und S-Sterne. Außerdem ist die Lage der Hauptreihe (ZAMS) und das Gebiet Planetarischer Nebel (PN) eingezeichnet.

Im Vergleich mit Entwicklungswegen von Sternen aus den verschiedenen Massenbereichen (Bilder 4, 10, 11, 20) wird der folgende Zusammenhang deutlich.

Für große Sternmassen (obere Hauptreihe) schließt der Entwicklungsweg schon auf der Hauptreihe selbst große Massenverlustraten ein. Sterne mittlerer und geringer Anfangsmasse erreichen erst in den späten Stadien ihrer Entwicklung auf dem AGB ähnlich große Verlustraten.

Außer für sehr geringe Anfangsmassen (unter $0.8 M_{\odot}$) führt die Sternentwicklung für alle Anfangsmassen durch Gebiete im HRD, die von großen Massenverlustraten gekennzeichnet sind. Die großen Verlustraten auf dem AGB sind wegen der relativ geringen Masse der Sterne in dieser Phase von besonderer Bedeutung.

In den späten Stadien der Entwicklung ist der Entwicklungsweg im HRD stark von der vorherigen Massenverlustgeschichte des Sterns abhängig. Insbesondere Phasen großer Verlustraten in nicht zu kurzen Zeitspannen der Entwicklung sind hier entscheidend.

Um den Massenverlust in Modellrechnungen der Sternentwicklung zu berücksichtigen, wird oftmals Gleichung (1) [Reimers 1975] benutzt. Diese empirische Gleichung wurde aus einigen bekannten Massenverlustraten roter Riesensterne abgeleitet und in der Folge gleichermaßen für den RGB als auch für den AGB benutzt. [Schönberner 1979] benutzt Gleichung (1) mit $\eta = 1$ und kommt zu dem Schluß, daß die Entwicklungszeitskala bei hohen Leuchtkräften (wie auf dem AGB) im wesentlichen vom Massenverlust und nicht vom Wachstum der Kernmasse bestimmt wird.

Bei AGB Sternen beobachtet man jedoch wesentlich höhere Massenverlustraten als nach (1) zu erwarten wären. Daher wurde diese Phase auch als *Superwind* bezeichnet und eine Anpassung über den η-Parameter durchgeführt ([Iben und Renzini 1983] [Mazzitelli und D'Antona 1986]). Der ver-

wendete Bereich ist dabei $\eta \sim 10 \ldots 1000$.
In der Sternentwicklungsrechnung von [Mazzitelli und D'Antona 1986] wird der Einfluß von Massenverlusten auf dem AGB durch eine Skalierung von (1) mit $\eta = 125 \ldots 1000$ berücksichtigt. Der Stern der Population I ($Y = 0.23, Z = 0.02$) mit anfänglich $3M_{\odot}$ auf der ZAMS ist an der Spitze des AGB durch den Massenverlust auf $0.68M_{\odot}$ reduziert worden (Bild 20). Unmittelbar nach einem thermischen Puls, in der Phase ruhigen Helium-Schalenbrennens, soll der Massenverlust einsetzen. Erreicht das Modell eine effektive Temperatur von $T_{eff} \approx 6000$ K, wird der Massenverlust wieder abgeschaltet.

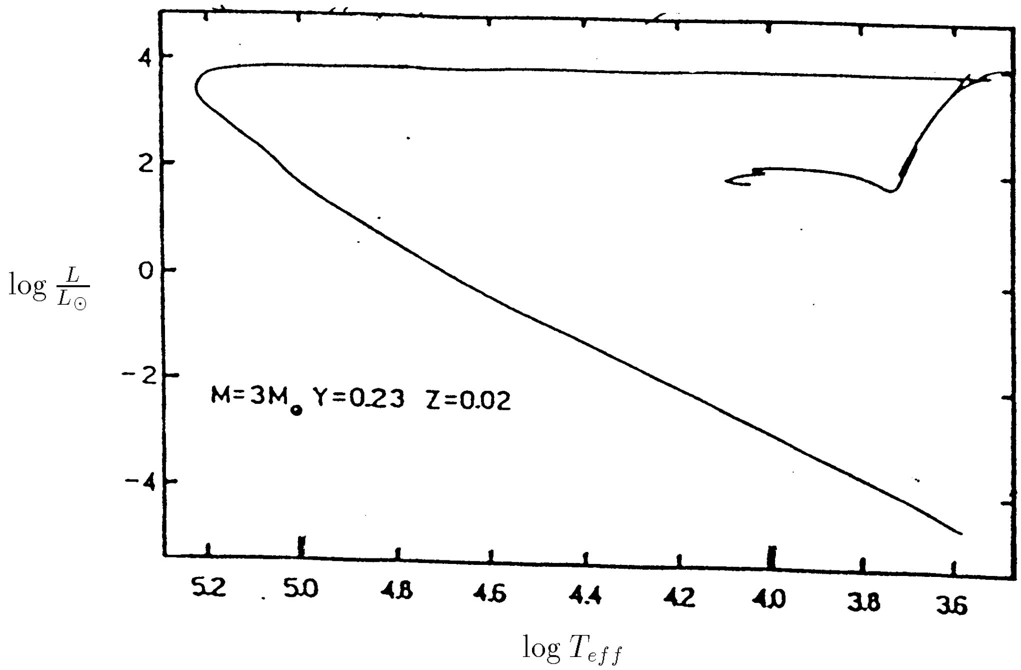


Bild 20: Entwicklungsweg eines Sterns mit $3M_{\odot}$ im HRD [Mazzitelli und D'Antona 1986].

Während sich der Stern auf dem AGB befindet, ändert sich die Kernmasse nur wenig. Dies ist eine Folge der starken Änderung der Sternmasse durch die hohen Massenverlustraten. Die Massenverluste verhindern, daß die für den AGB entscheidenden Brennprozesse lang genug anhalten können. Mit einer theoretischen Kernmasse–Leuchtkraft Relation kombiniert, zeigen Beobachtungen von AGB-Sternen in den Magellanschen Wolken wie gering die Änderungen in den Kernmassen tatsächlich sind [Iben 1991].
Zu Beginn der TP-AGB Phase besitzt ein Stern mit geringer Anfangsmasse ($M_i \leq 2\ M_{\odot}$) einen CO-Kern mit $M_c \sim 0.5\ M_{\odot}$. Bevor die Kernmasse durch das He-Brennen um mehr als $0.1M_{\odot}$ angestiegen ist, hat der Stern seine wasserstoffreiche Hülle verloren und den AGB bereits verlassen. Sterne über $2M_{\odot}$ fügen dem Kern in ihrer TP-AGB Phase nur einige 0.01 $M_{\odot}$ hinzu, bevor auch sie ihre Hülle abstoßen.

$M_i[M_{\odot}]$	1..2	2..8	8..10
M_{WD}	0.6	0.6..1.1	1.1..1.4

Die Kernmasse auf dem AGB entspricht bereits der des CO weißen Zwerges der am Ende der AGB-Entwicklung steht. Für Anfangsmassen über $8M_{\odot}$ besteht der Kern aus Sauerstoff und Neon. Bei über $10M_{\odot}$ Anfangsmasse erreicht der O–Ne-Kern die Chandrasekharsche Grenzmasse von $1.4M_{\odot}$. Oberhalb dieser Grenze beginnt der Kern durch Elektroneneinfang von ^{24}Mg zu kollabieren und wird zu einem Neutronenstern.

4.2 Problemfelder der Sternentwicklung

In der Sternentwicklungsrechnung wird ein starkes Gewicht auf die Beschreibung der AGB-Phase gelegt. In den Spektren von Sternen auf dem AGB zeigt sich eine Vielfalt von Elementen. Man findet große Mengen schwerer Elemente wie Kohlenstoff, Sauerstoff und die neutronenreichen Elemente aus dem s-Prozeß. Letztere entstehen aus dem Einfang freier Neutronen durch bereits existierende Kerne (wie zum Beispiel ^{56}Fe) auf einer Zeitskala, die verglichen mit den meisten β-Zerfällen lang ist. Die schweren Kerne müssen vorhergehenden Sterngenerationen entstammen. Für eine ausreichende Neutronenerzeugung kommen im wesentlichen zwei Reaktionen in Frage: $^{13}\mathrm{C}(\alpha, n)^{16}\mathrm{O}$ und $^{22}\mathrm{Ne}(\alpha, n)^{25}\mathrm{Mg}$. Welche dieser Quelle bei AGB-Sternen aktiv ist, ist noch in der Diskussion. Die ^{22}Ne-Quelle wird in Sternen großer Kernmasse ($M_{CO} \gtrsim 1 M_{\odot}$) vermutet [Arnould 1991]. AGB-Sterne haben nicht nur einen wesentlichen Anteil an der roten bzw. infraroten Helligkeit von Galaxien, sie werden auch als die wesentliche Quelle von Kohlenstoff und s-Prozeß Elementen im Universum angesehen [Sackmann und Boothroyd 1991].

Die Modellierung der Sternentwicklung muß die Frage klären, welche Elemente ein Stern in welchen Größenordnungen freigibt, damit diese für spätere Sterngenerationen oder zur Planetenbildung zur Verfügung stehen können. Daher ist es auch ein Ziel der Sternentwicklungsrechnung, in den Modellen die solare Verteilung der Elementhäufigkeiten zu erreichen. Eine solche Verteilung stellte schließlich auch den Ausgangspunkt unseres eigenen Sonnensystem dar.

Die Beschreibung der äußeren Schichten eines Sterns und seiner Hülle stellt die Schnittstelle zwischen Stern und interstellarem Medium dar. Für sehr hohe Massenverlustraten ist die Beschreibung der Hüllenstruktur von entscheidender Bedeutung für das äußere Erscheinungsbild des Sterns. Ein Beispiel dafür sind die OH/IR-Sterne, bei denen der Stern durch seine Hülle zu einem Infrarot-Objekt geworden ist. Wirklich sichtbar ist hier nur die Hülle und nicht die eigentliche Photosphäre des Sterns.

Aus der Beobachtung sind kohlenstoffreiche (C-) Sterne bekannt. Einen solchen Stern durch ein Modell zu erzeugen, ist ein weiteres Problem.

Normalerweise ist in den äußeren Schichten eines Sterns Sauerstoff häufiger als Kohlenstoff. In Sternen des Spektraltyps M findet man daher ein Häufigkeitsverhältnis von $^{12}\mathrm{C} : {}^{16}\mathrm{O} < 1$. In einem C-Stern (Spektraltypen N,R) überwiegt dagegen Kohlenstoff in diesem Verhältnis. Für diese Sterne muß zuerst in ausreichender Menge Kohlenstoff erzeugt und dann aus dem Inneren bis an die Sternoberfläche transportiert werden.

Die Erzeugung und Vernichtung von Kohlenstoff werden im wesentlichen von zwei Reaktionen bestimmt: dem 3α–Prozeß $^{4}\mathrm{He}\,(2\alpha, \gamma)\,^{12}\mathrm{C}$ sowie $^{12}\mathrm{C}\,(\alpha, \gamma)\,^{16}\mathrm{O}$. In den He-brennenden Schalenquellen während der TP-AGB Phase dominiert der 3α–Prozeß, so daß primär Kohlenstoff und nur wenig Sauerstoff erzeugt wird.

Alle AGB-Sterne besitzen eine tiefe äußere Konvektionszone. Die von einem He-Flash getriebene Interschalen-Konvektionszone die vom Zentrum der He-Schalenquelle nach außen, bis fast an die H-Schalenquelle reicht, bildet eine Kohlenstoff-Tasche (siehe Bild 13). Sie besteht bei Sternen geringer Masse hauptsächlich aus Helium sowie zu $\sim 25\%$ aus Kohlenstoff und $\sim 2\%$ aus Sauerstoff. Hier liegt die Quelle der C-Sterne auf dem AGB [Sackmann und Boothroyd 1991].

Ein Flash der He-Schalenquelle treibt die darüberliegenden Gebiete nach außen und löscht die H-Schalenquelle aus. Auch in der H-reichen Region bewegt sich die Materie nach außen und kühlt dabei ab. Die Basis der äußeren Konvektionszone reicht dann in der Masse weiter nach innen. Dabei werden Gebiete erreicht in denen Wasserstoff bereits zum Teil in Helium umgewandelt wurde. Mit einer genügend großen Kernmasse von $M_{CO} > 0.8 \ldots 0.9 M_{\odot}$ reicht die äußere Konvektionszone bis zur eben erwähnten Kohlenstoff-Tasche. Zusammen mit s-Prozeß Elementen wird auch Kohlenstoff an die Sternoberfläche aufgemischt. Die Beobachtung zeigte schon lange kohlenstoffreiche Sterne die mit den Modellen der Sternentwicklung so nicht erklärt werden konnten. Mit diesem Aufmisch-Prozeß (*dredge-up*) führen die Modelle nun auch zur Entstehung von C-reichen Sternen.

Die angenommenen Werte für das Verhältnis zwischen Mischungsweglänge und Druckskalenhöhe $\alpha = \ell/H_p$ haben einen starken Einfluß auf die resultierende Sternentwicklung. So entscheidet der Parameter α über das Ausmaß von Aufmisch-Prozessen bereits prozessierter Materie in äußere Sternbereiche. Für ein Modell mit einer Kernmasse von $M_{CO} \sim 0.96 M_\odot$ wird zum Beispiel mit $\alpha \sim 1.0$ an der Basis der äußeren Konvektionszone innerhalb von 20000 Jahren $^{12}C \rightarrow ^{14}N$ umgewandelt. Für $\alpha \sim 0.7$ ist das nicht mehr der Fall [Iben 1991]. Das bedeutet, daß die Wahl der Größe α darüber entscheidet, in welchem Ausmaß sich Kohlenstoff in dem aufgemischten Material befindet. Wurde dieser vollständig umgewandelt, kann durch das Aufmischen kein C-reicher Stern mehr entstehen.
Zum α-Parameter der Mischungswegtheorie findet sich ebenfalls bei [Iben 1991] ein bezeichnendes Zitat. Als Kommentar zu der Tatsache, daß sich die Modelle oftmals zu Aufmisch-Prozessen zwingen lassen, indem man nur den Parameter α groß genug wählt, steht:

> *Given the crudeness of the mixing length treatment of convection, who is to say that such large values are inappropriate ?*

Durch die Wahl des Parameters α ändert sich nicht nur das äußere Erscheinungsbild des betroffenen Sterns; die chemische Zusammensetzung der Hülle kann so beschaffen sein, daß staubgetriebene Winde zu einem sehr effektiven Massenverlust (mit hohen Verlustraten) führen. Der Effekt auf die Entwicklung des Sterns kann dabei, wie schon erwähnt, dramatisch sein. Daher ist die anfängliche Vernachlässigung von Massenverlusten in den Modellen sehr schwerwiegend. Die hohen Massenverlustraten auf dem AGB tendieren dazu, dem Aufmischen entgegen zu wirken. [Sackmann und Boothroyd 1991] erwähnen unter Einschluß von Massenverlusten Aufmisch-Prozesse in Sternen geringer Masse. Lag im Laufe der Entwicklung die effektive Temperatur T_{eff} unter ~ 5000 K, so wurde ein Reimers-Wind nach (1) mit $\eta = 0.4$ angesetzt. Die Wahl des Parameters α ist dabei entscheidend. Für den klassischen Wert $\alpha = 1.0$ zeigen diese Modelle kein Aufmischen (Massen in $M_\odot$).

M_i	Z	M_{AGB}	α
2.0	0.001	1.72	1.5
1.2	0.001	0.81	3.0

Mit $\alpha = 1.5 \ldots 3.0$ kommt es dagegen zum Aufmischen bereits prozessierten Materials an die Sternoberfläche. Auch hier kann eine ungünstige Wahl der Größe α die Entstehung eines C-reichen Sterns verhindern.
Über $\sim 10^6$ Jahre lang muß frischer Kohlenstoff in die äußere Konvektionszone aufgemischt werden um an der Oberfläche des Sterns die O- durch die des C-Häufigkeit zu übertreffen [Iben 1991]. Die Lebensdauer auf dem AGB entscheidet darüber, ob der Stern zu einem C-Stern werden kann. Ihrerseits beschränken die hohen Massenverlustraten auf dem AGB die Lebensdauer.

4.3 Ausblick

Die Beschreibung der Sternentwicklung ist in einigen Punkten durch Parametrisierungen der beteiligten physikalischen Vorgänge behindert. Bereits erwähnte Beispiele dafür sind die Mischungswegtheorie der Konvektion (Parameter α) und die Massenverlustrate nach [Reimers 1975] (Parameter η). Oftmals treten solche Parameter dabei so auf, daß sie sich gegenseitig beeinflussen und führen damit zu einem weiteren Anwachsen der Unsicherheiten der resultierenden Ergebnisse. Die Wahl des Parameters α ändert über die äußere Konvektionszone den Sternradius. Dieser geht in die Massenverlustrate nach Reimers ein. Die Wahl von α kann so durch eine geeignete Wahl von η wieder aufgehoben werden.

Eine in sich geschlossene Beschreibung des Massenverlustes, in die nur die stellaren Grundparameter eingehen, könnte in diesem Punkt Abhilfe schaffen und die Beschreibung von einem ihrer Parameter befreien. Eine reine Sternentwicklungsrechung gibt Auskunft über Temperatur, Druck und die chemische Zusammensetzung der Außenschichten. Man kann so Anfangswerte für die Hüllenmodelle gewinnen und die Massenverluste im Lauf der Entwicklung entsprechend beschreiben.

Für kohlenstoffreiche Sterne auf dem AGB existiert durch die Arbeit von Gail und Sedlmayr [1984, 1985, 1987, 1988 (Paper I–IV)] eine selbstkonsistente Bestimmung der Massenverlustrate aus den grundlegenden stellaren Parametern. Aus vier unabhängigen Größen (Sternmasse M_*, Sternleuchtkraft L_*, effektive Temperatur T_* und relatives Häufigkeitsverhältnis ϵ_C/ϵ_O) werden selbstkonsistent unter anderem die Massenverlustrate $\dot{M}$ sowie die Endgeschwindigkeit v_∞ des Windes berechnet.

Bild 21 stellt den Bereich im HRD dar, in dem eine Beschreibung durch einen staubgetriebenen (*dust driven*) Wind möglich ist. Die gestrichelte Linie stellt dabei die untere Grenze für einen staubgetriebenen Wind bei den angegebenen Parametern dar.

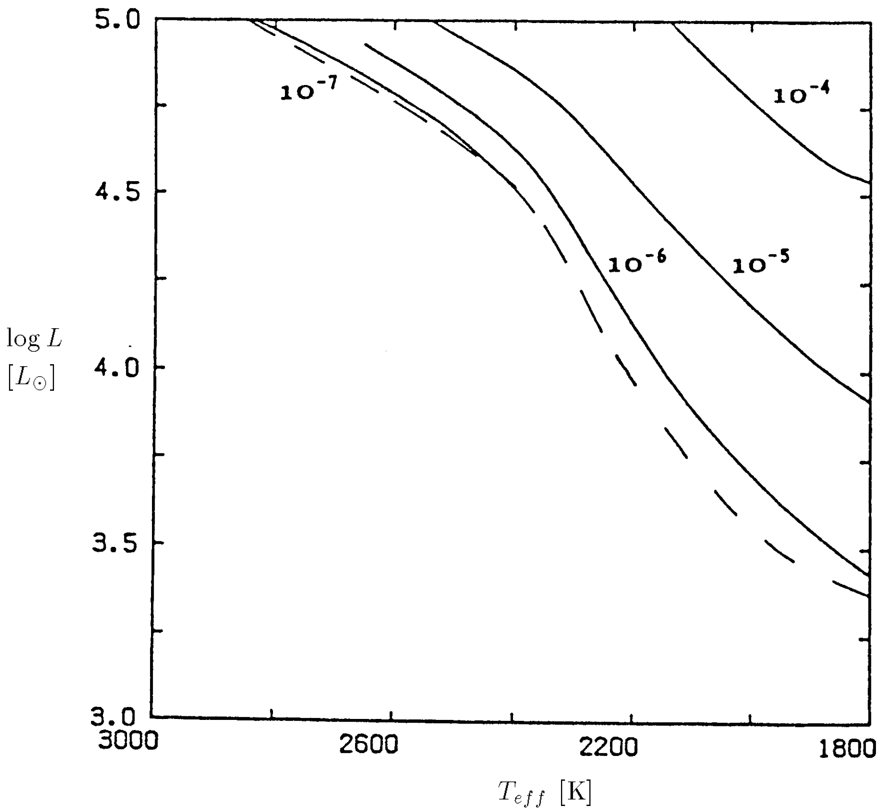


Bild 21: Linien gleicher Massenverlustraten $\dot{M}$ $[M_\odot/\mathrm{yr}]$ für einen staubgetriebenen Wind eines C-Sterns mit $M_* = 1M_\odot, \epsilon_C/\epsilon_O = 2$. Nach [Dominik *et al.* 1990].

Unter den Bedingungen die in der Hülle eines kühlen Riesensternes später Entwicklungsstadien herrschen, kann es zu einer sehr effektiven Bildung von Staubkörnern kommen. Bei einer genügend hohen Dichte bzw. geringen Temperatur wird im Abstand von einigen Sternradien von Stern die Bildung von Staub ermöglicht. Durch den Strahlungsdruck auf den Staub kann man den Wind antreiben. Die Impulskopplung zwischen Staub und dem umgebenden Gas beschleunigt den Wind auf seine Endgeschwindigkeit.
Mit zunehmender Sternleuchtkraft, abnehmender effektiver Temperatur und abnehmender Sternmasse nimmt die Massenverlustrate stark zu [Dominik *et al.* 1990]. Im Verlauf der Sternentwicklung zu höheren Leuchtkräften bei tieferen effektiven Temperaturen steigt also die Massenverlustrate an. Die infolgedessen abnehmende Sternmasse erhöht wiederum den Massenverlust. Der sogenannte *Superwind*, der letztendlich zur Bildung eines planetarischen Nebels führt und die AGB-Entwicklung beendet, kann daher durch einen staubgetriebenen Wind erklärt werden [Dominik *et al.* 1990].
Das Ziel der weiteren Arbeit ist die Kopplung einer Sternentwicklungsrechnung mit der selbstkonsistenten Bestimmung der Massenverlustrate während der AGB-Phase. Der quantitative Eintrag von Gas und Staub in das interstellare Medium kann erst durch die detailierte Beschreibung der Struktur des Windes bestimmt werden.
Zu klären bleibt in welcher Form diese Kopplung erfolgen muß. Für die selbstkonsistente Bestimmung der Massenverlustrate werden an einem noch genau zu definierenden Übergabepunkt in der Sternhülle die benötigten stellaren Parameter übergeben. Wahrscheinlich gewährleistet diese Vorgehensweise aber nicht den gewünschten stetigen Übergang zwischen der Struktur des Sternmodells und der der Hülle. Daher ist es möglicherweise nötig, den Umfang der Sternmodelle bis in den Bereich der Windentstehung zu erweitern.
Mit einer gelungenen Kopplung zwischen Stern- und Hüllenmodell wäre die Notwendigkeit behoben, Winde in der AGB-Phase der Sternentwicklung über eine Anpassung der Massenverlustrate nach Reimers zu beschreiben.

Jeder der zuvor erwähnten freien Parameter, um den die Beschreibung reduziert werden kann, ist als ein weiterer Schritt nach vorne auf dem Weg zum völligen[1] Verständnis der stellaren Evolution wie auch der des Universums selbst zu werten. Damit gehen mit ziemlicher Sicherheit neue, bis heute noch nicht aufgetretene, Schwierigkeiten einher. Diese Schwierigkeiten sind aber oftmals die Triebfeder sich überhaupt mit der Lösung eines bestehenden Problems zu beschäftigen.

[1] In diesem Zusammenhang ist der Begriff *völlig* eher als euphemistisch zu werten. Die Frage ob man ein wirklich völliges Verständnis überhaupt erwarten darf, ist eher von philosophischer Natur, müßte man dafür doch auch sich selbst *völlig* verstehen.

Literatur

[Arnould 1991] Arnould, M., 1991. A brief review of the s-process. In Michaud, G. und Tutukov, A. V., Editoren, *Evolution Of Stars: The Photospheric Abundance Connection*, IAU Symp. 145, Seiten 287–297, Kluver Academic Publishers, Dordrecht.

[Cox und Giuli 1968] Cox, J. P. und Giuli, R. T., 1968. *Principles of Stellar Structure*, Kapitel 14. Gordon and Breech, New York.

[deJager *et al.* 1988] deJager, C., Nieuwenhuijzen, H., und van der Hucht, K. A., 1988. Mass loss rates in the Hertzsprung–Russell diagram. *Astron. Astrophys. Suppl.*, **72**, 259–289.

[Dominik *et al.* 1990] Dominik, C., Gail, H.-P., Sedlmayr, E., und Winters, J. M., 1990. HR diagramms for dust driven winds around C-stars. *Astron. Astrophys.*, **240**, 365–375.

[Gail *et al.* 1984] Gail, H.-P., Keller, R., und Sedlmayr, E., 1984. Dust formation in stellar winds. I. A rapid computational method and application to graphite condensation. *Astron. Astrophys.*, **133**, 320–332. (Paper I).

[Gail und Sedlmayr 1985] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1985. Dust formation in stellar winds. II. Carbon condensation in stationary, spherically expanding winds. *Astron. Astrophys.*, **148**, 183–190. (Paper II).

[Gail und Sedlmayr 1987] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1987. Dust formation in stellar winds. III. Self-consistent models for dust-driven winds around C-stars. *Astron. Astrophys.*, **171**, 197–204. (Paper III).

[Gail und Sedlmayr 1988] Gail, H.-P. und Sedlmayr, E., 1988. Dust formation in stellar winds. IV. Heteromolecular carbon grain formation and growth. *Astron. Astrophys.*, **206**, 153–168. (Paper IV).

[Habing 1990] Habing, H. J., 1990. The evolution of Red Giants to White Dwarfs, a review of the observational evidence. In Mennessier, M. O. und Omont, A., Editoren, *From Miras to Planetary Nebulae: Which path for stellar evolution?*, Seiten 16–40, Editions Frontières, Gif sur Yvette Cedex - France.

[Hofmeister *et al.* 1964] Hofmeister, E., Kippenhahn, R., und Weigert, A., 1964. Sternentwicklung II. Die wasserstoffbrennende Phase eines Sterns von 7.0 Sonnenmassen. *Zeitschrift für Astrophysik*, **59**, 242–260.

[Iben 1967] Iben, I., 1967. Stellar evolution within and off the Main Sequence. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **5**, 571.

[Iben 1991] Iben, I., 1991. Asymptotic Giant Branch Stars: Thermal Pulses, Carbon Production and Drede Up; Neutron Sources and s-process Nucleosynthesis. In Michaud, G. und Tutukov, A. V., Editoren, *Evolution Of Stars: The Photospheric Abundance Connection*, IAU Symp. 145, Seiten 257–274, Kluver Academic Publishers, Dordrecht.

[Iben und Renzini 1983] Iben, I. und Renzini, A., 1983. Asyptotic Giant Branch evolution and beyond. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **21**, 271–342.

[Kippenhahn *et al.* 1965] Kippenhahn, R., Thomas, H., und Weigert, A., 1965. Sternentwicklung IV. Zentrales Wasserstoff- und Heliumbrennen bei einem Stern von 5.0 Sonnenmassen. *Zeitschrift für Astrophysik*, **61**, 241–267.

[Kippenhahn *et al.* 1967] Kippenhahn, R., Weigert, A., und Hofmeister, E., 1967. Methods for calculating stellar evolution. *Methods in Comp. Phys.*, **7**, 129–190.

[Lafon und Berruyer 1991] Lafon, J. J. und Berruyer, N., 1991. Mass loss mechanisms in evolved stars. *Astron. Astrophys. Rev.*, **2**, 249–289.

[Lan1965] 1965. Landolt-Börnstein, Neue Serie Gruppe IV, Bd. 1. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[Mazzitelli und D'Antona 1986] Mazzitelli, I. und D'Antona, F., 1986. Evolution from the Main Sequence to the White Dwarf State for a 3 $M_\odot$ Star. *Astrophys. J.*, **308**, 706–720.

[Reimers 1975] Reimers, D., 1975. Circumstellar Absorption Lines and Mass Loss from Red Giants. In *Problèmes d'Hydrodynamique Stellaire*, Mem. Soc. R. Sci. Liège, 6^e, 8, Seiten 369–382.

[Renzini und Fusi-Pecci 1988] Renzini, A. und Fusi-Pecci, F., 1988. Test of Evolutionary Sequences using color magnitude Diagrams of Globular Clusters. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **26**, 199–244.

[Ritter 1988] Ritter, H., 1988. Innerer Aufbau und Entwicklung der Sterne. (Vorlesungsskript), Kap. V.

[Sackmann und Boothroyd 1991] Sackmann, I. J. und Boothroyd, A. I., 1991. On Low Mass AGB Stars. In Michaud, G. und Tutukov, A. V., Editoren, *Evolution Of Stars: The Photospheric Abundance Connection*, IAU Symp. 145, Seiten 275–285, Kluver Academic Publishers, Dordrecht.

[Scheffler und Elsässer 1990] Scheffler, H. und Elsässer, H., 1990. *Physik der Sterne und der Sonne*, Kapitel IV.2, V.5, VI.1, VI.3. Bibliographisches Institut, Mannheim.

[Schönberner 1979] Schönberner, D., 1979. Asymptotic Giant Branch Evolution with Steady Mass Loss . *Astron. Astrophys.*, **79**, 108–114.

[Thomas 1967] Thomas, H.-C., 1967. Sternentwicklung VIII. Der Helium-Flash bei einem Stern von 1.3 Sonnenmassen. *Zeitschrift für Astrophysik*, **67**, 420–455.

[Weidemann und Schönberner 1990] Weidemann, V. und Schönberner, D., 1990. Stellar evolution theory: Up to and on the AGB. In Mennessier, M. O. und Omont, A., Editoren, *From Miras to Planetary Nebulae: Which path for stellar evolution?*, Seiten 3–15, Editions Frontières, Gif sur Yvette Cedex - France.

[Weigert 1966] Weigert, A., 1966. Sternentwicklung VI. Entwicklung mit Neutrinoverlusten und thermische Pulse der Helium-Schalenquelle bei einem Stern von 5.0 Sonnenmassen. *Zeitschrift für Astrophysik*, **64**, 395–425.

[Weinzierl 1991] Weinzierl, S., 1991. Verteilung staubbildender Sterne. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin.